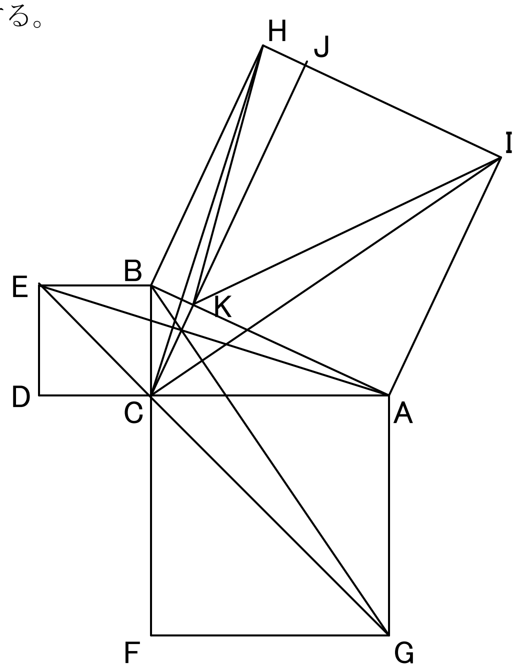
［証明１］

この図で、三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとする。四角形 BCDE、ACFG、ABHI は正方形であるとする。また、CJ と AB は垂直であるとする。



HB// JC より

△BHK＝△BHC　…①

△BHC≡△BAE より

△BHC＝△BAE　…②

EB// AD より

△BAE＝△BCE　…③

①②③より

△BHK＝△BCE　…④

④より

（長方形 BHJK）＝（正方形 BCDE）　…⑤

同様にして

（長方形 AIJK）＝（正方形 ACFG）　…⑥

⑤⑥より

（正方形 ABHI）＝（正方形 BCDE）＋（正方形 ACFG）

すなわち

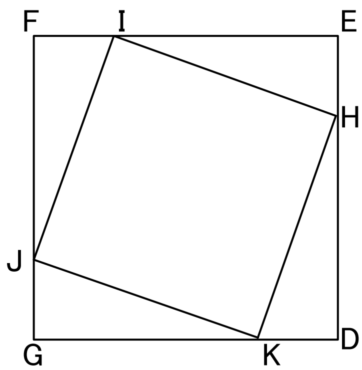
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

［証明２］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$ とする。図のように一辺が $a+b$ の正方形を作る。ただし、

$$EH = FI = GJ = DK = a、DH = EI = FJ = GK = b$$

とする。△ABC≡△HKD≡△IHE≡△JIF≡△KJG より、四角形 HIJK は一辺 c の正方形である。面積を考えることにより、



$$(a+b)^2 = c^2 + \frac{ab}{2} \times 4$$

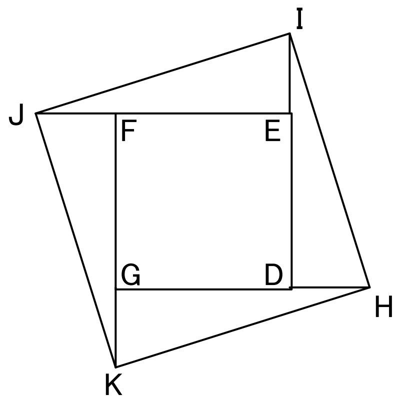
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明３］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。図のように一辺が$b - a$の正方形DEFGを作り、その４辺をそれぞれaだけ延長する。すなわち$DH = EI = FJ = GK = a$、$GH = DI = EJ = FK = b$である。△ABC、△HKG、△IHD、△JIE、△KJFが合同であることより、四角形HIJKは一辺がcの正方形である。面積を考えて

$$c^2 = (b-a)^2 + \frac{ab}{2} \times 4$$



整理すると

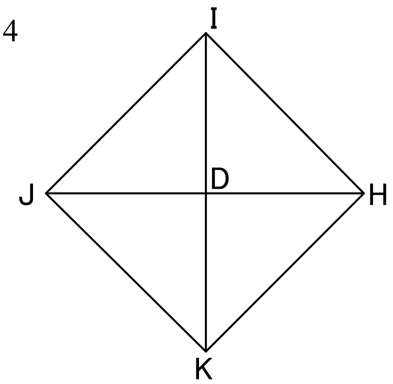
$$a^2 + b^2 = c^2$$

（注）

$a = b$の場合は以下の図のようになる。

ただし、$D = E = F = G$である。この図で

$$（四角形HIJK）= c^2 = \frac{1}{2} a^2 \cdot 4$$



となるが、$a = b$より

$$2a^2 = a^2 + b^2$$

が成り立つから、この場合も

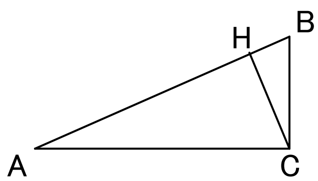
$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明４］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。点Cから対辺ABに下ろした垂線の足をHとすると、$\triangle ABC \backsim \triangle CBH \backsim \triangle ACH$　であるから

$$BH = \frac{a^2}{c}、AH = \frac{b^2}{c}$$

これらと$AH + BH = AB$より



$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明５］

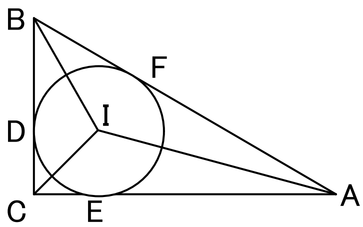
三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。△ABCの内接円と辺BC、CA、ABとの接点をD、E、Fとする。△ABCの内接円の中心をI、半径をrとすると、$CD = CE = r$、$AE = AF$、$BF = BD$であるから、$EA + AB + BD = 2c$より

$$r = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{a+b-c}{2} \quad \cdots ①$$

△ABCの面積が△BCI、△CAI、△ABIの面積の和に等しいことより

$$\frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$2ab = 2(a+b+c)r \quad \cdots ②$$



①②より

$$2ab = (a+b+c)(a+b-c)$$

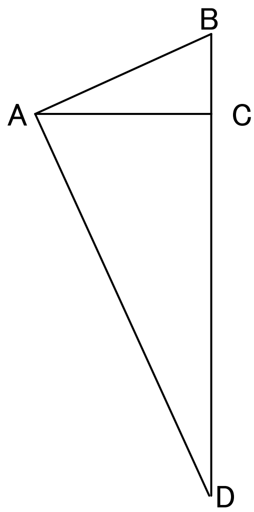
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明6］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。点Aを通り辺ABに垂直な直線と直線BCとの交点をDとする。△ABC、△DBA、△DACが相似であることから

$$CD = \frac{b^2}{a}、BD = \frac{c^2}{a}$$



これらと、$BD = BC + CD$より

$$\frac{c^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明７］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。辺 BC の B の側の延長上に $BD = c$ を満たすように点 D をとり、辺 BC の C の側の延長上に $BE = c$ を満たすように点 E をとる。$AD = DB$ より、

$$\angle BAD = \angle BDA = \frac{\angle ABE}{2} \quad \cdots①$$

$AB = BE$ より

$$\angle BAE = \angle BEA = \frac{\angle ABD}{2} \quad \cdots②$$

①②と $\angle ABD + \angle ABE = 180°$ より

$$\angle BAD + \angle BAE = 90°$$

ゆえに、

$$\angle EAD = 90°$$

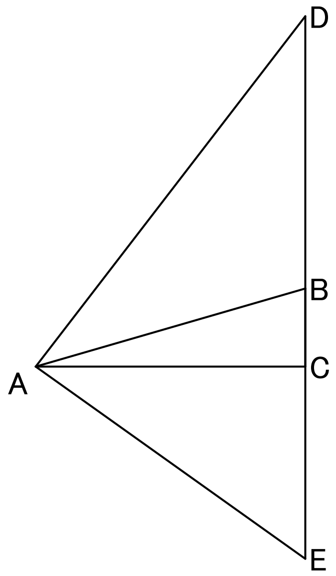
したがって、△CDA、△CAE は相似になるから

$$CD : CA = CA : CE$$

$$(c + a) : b = b : (c - a)$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$



［証明８］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。△ABC の $\angle C$ 内にある傍接円（辺 AB、辺 CA の A の側の延長、辺 CB の B の側の延長に接する円）と直線 BC、直線 CA、辺 AB との接点を D、E、F とする。△ABC のこの傍接円の中心を I、半径を r とすると、$CD = CE = r$、$AE = AF$、$BF = BD$ であるから、

$$r = \frac{a + b + c}{2} \quad \cdots①$$

△ABC の面積が△BCI、△CAI の面積の和から△ABI の面積を引いたものであることより

$$\frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} - \frac{cr}{2}$$

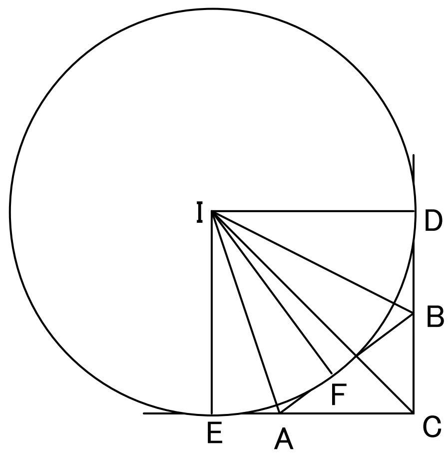
$$2ab = 2(a + b - c)r \quad \cdots②$$

①②より

$$2ab = (a + b - c)(a + b + c)$$

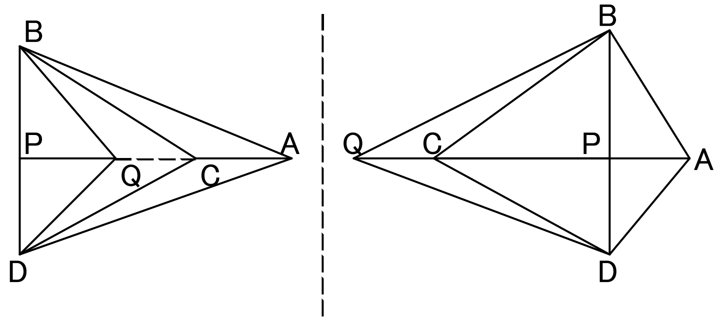
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$



［補題１］

四角形ABCDにおいて $AC \perp BD$ であるとする。四角形ABCDの面積は $\dfrac{AC \times BD}{2}$ に等しい。



（証明）

直線ACと直線BDとの交点をPとする。Pが線分BD上にあるとしても一般性は失われない（Pが線分BD上にないとき、Pは線分AC上にあるから、以下の証明でACとBDを入れ替えて行えばよい）。$PQ = AC$ を満たす点Qを直線AC上にとる。このとき、△ACB＝△PQB、△ACD＝△PQDであるから、四角形ABCDの面積は三角形BDQの面積と等しい。三角形BDQの面積は $\dfrac{PQ \times BD}{2} = \dfrac{AC \times BD}{2}$ である。

［証明９］

三角形ABCにおいて $\angle C = 90^\circ$ であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△CED、△ECFは合同であるとする。△CDEは△ABCを90°回転して平行移動したものであるから

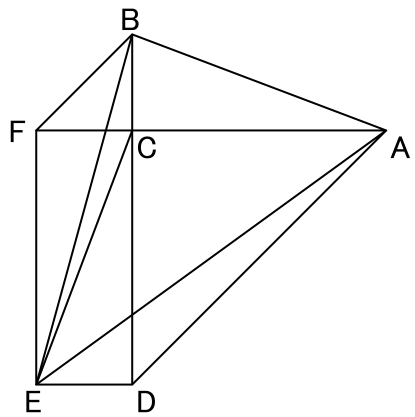
$CE \perp AB$

これと［補題１］により、

（四角形CAEB）$= \dfrac{c^2}{2}$

$AC /\!/ ED$、$BC /\!/ EF$ より

△BCE＝△BCF＝$\dfrac{a^2}{2}$、△CAE＝△CAD＝$\dfrac{b^2}{2}$



ゆえに、

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

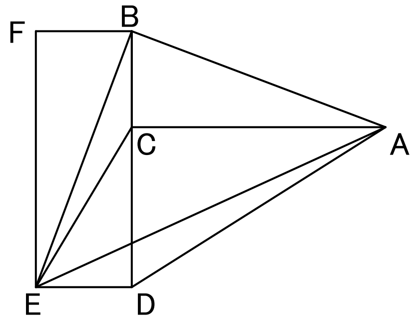
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 10］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△BED、△EBFは合同であるとする。△BEDは△ABCを 90° 回転して平行移動したものであるから



$$BE \perp AB$$

したがって

$$\triangle ABE = \frac{c^2}{2}$$

また、

$$\triangle BCE = \frac{a^2}{2}、\triangle ABD = \frac{b^2}{2}$$

$AC /\!/ DE$より

$$\triangle ACD = \triangle ACE$$

ゆえに、

$$（四角形ABCE）= \triangle ABD = \frac{b^2}{2}$$

以上より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

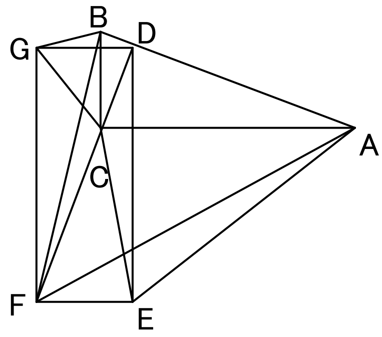
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 11］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$ 、$CA = b$ 、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△DFE、△FDG は合同であるとし、DE // BC とする。△DFE は△ABC を 90° 回転して平行移動したものであるから



$DF \perp AB$

したがって

$$\triangle ABF = \frac{c^2}{2}$$

また、［補題 1］より

$$(\text{四角形 BDCG}) = \frac{a^2}{2}\text{、}(\text{四角形 AECD}) = \frac{b^2}{2}$$

BC // GF、AC // EF より

△BCG＝△BCF、△ACE＝△ACF

ゆえに、

$$\triangle BDF = (\text{四角形 BDCG}) = \frac{a^2}{2}\text{、}\triangle AFD = (\text{四角形 AECD}) = \frac{b^2}{2}$$

以上より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

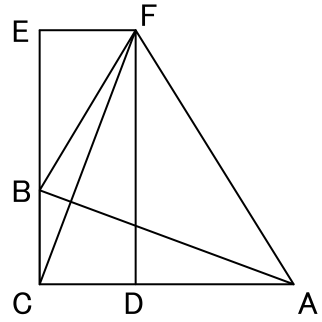
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 12］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$ 、$CA = b$ 、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△FCD、△CFE は合同であるとする。△FCD は△ABC を 90° 回転して平行移動したものであるから



$CF \perp AB$

［補題１］により

$$（四角形 ACBF）= \frac{c^2}{2}$$

また、

$$\triangle BCF = \frac{a^2}{2}、\triangle ACF = \frac{b^2}{2}$$

以上より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

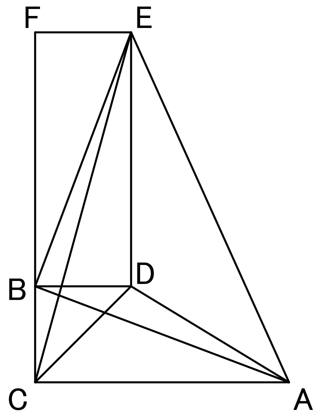
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 13］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△EBD、△BEF は合同であるとする。△EBD は△ABC を 90° 回転したものであるから



$$BE \perp AB$$

したがって

$$\triangle ABE = \frac{c^2}{2} \quad \cdots ①$$

［補題１］により

$$(\text{四角形 AECD}) = \frac{b^2}{2} \quad \cdots ②$$

また、

$$\triangle BCE = \frac{a^2}{2} \quad \cdots ③$$

②③より

$$(\text{五角形 AEBCD}) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \cdots ④$$

$BD \parallel CA$ より

$$\triangle DBC = \triangle DBA \quad \cdots ⑤$$

⑤より

$$(\text{五角形 AEBCD}) = \triangle ABE \quad \cdots ⑥$$

①④⑥より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

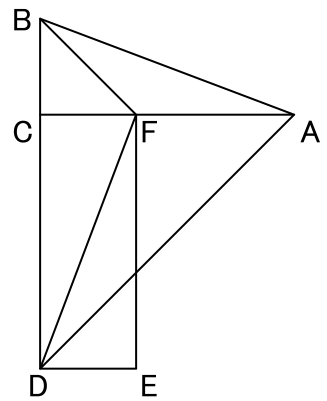
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 14］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△DFC、△FDEは合同であるとする。△DFCは△ABCを 90° 回転したものであるから



$$DF \perp AB$$

したがって［補題１］により

$$(\text{四角形AFBD}) = \frac{c^2}{2} \quad \cdots ①$$

また、

$$\triangle BCF = \frac{a^2}{2}、\triangle ACD = \frac{b^2}{2} \quad \cdots ②$$

①②より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

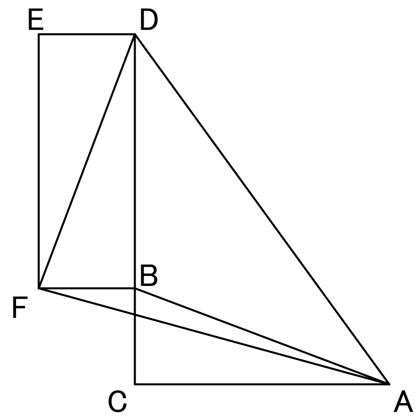
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 15］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△DFB、△FDEは合同であるとする。△DFBは△ABCを 90° 回転して平行移動したものであるから



$$DF \perp AB$$

したがって［補題１］により

$$(\text{四角形AFBD}) = \frac{c^2}{2} \quad \cdots ①$$

また、

$$\triangle ABF = \frac{a^2}{2}、\triangle ABD = \frac{b^2}{2} \quad \cdots ②$$

①②より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

整理すると

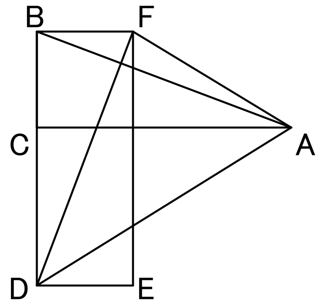
$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 16］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△FDE、△DFBは合同であるとする。△FDEは△ABCを90°回転して平行移動したものであるから

$DF \perp AB$



したがって［補題１］により

$$(\text{四角形}\,AFBD) = \frac{c^2}{2} \quad \cdots①$$

また、

$$\triangle ABF = \frac{a^2}{2}、\triangle ABD = \frac{b^2}{2} \quad \cdots②$$

①②より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

整理すると

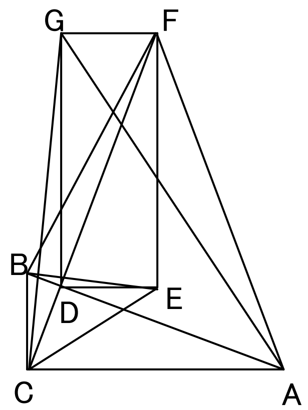
$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 17］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$ 、$CA = b$ 、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△FDE、△DFG は合同であるとする。ただし、DE // CA であり、点 D は C から AB に下ろした垂線の足である。△FDE は△ABC を 90° 回転して平行移動したものであるから

$$DF \perp AB$$



したがって

$$\triangle ABF = \frac{c^2}{2} \quad \cdots ①$$

［補題 1］より

$$(\text{四角形 } BECD) = \frac{a^2}{2} \quad \cdots ②$$

BC // GD より

$$\triangle BFC = \triangle BEC \quad \cdots ③$$

②③より

$$\triangle BFD = \frac{a^2}{2} \quad \cdots ④$$

［補題 1］より

$$(\text{四角形 } ADCG) = \frac{b^2}{2} \quad \cdots ⑤$$

AC // FG より

$$\triangle ACG = \triangle ACF \quad \cdots ⑥$$

⑤⑥より

$$\triangle ADF = \frac{b^2}{2} \quad \cdots ⑦$$

④⑦より

$$\triangle ABF = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \cdots ⑧$$

①⑧より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

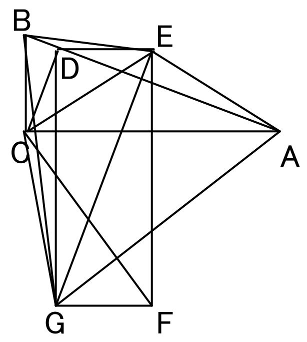
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 18］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△EGF、△GEDは合同であるとする。ただし、DE// CAであり、点DはCからABに下ろした垂線の足である。△EGFは△ABCを90°回転して平行移動したものであるから



　EG ⊥ AB

したがって［補題１］により

$$（四角形EBGA）= \frac{c^2}{2} \quad \cdots ①$$

さらに［補題１］により

$$（四角形BECD）= \frac{a^2}{2}、（四角形ADCG）= \frac{b^2}{2} \quad \cdots ②$$

DE// CAより△CDE＝△ADEであるから、

　△ABE＝（四角形BECD）　…③

BC// GDより△CDG＝△BGDであるから、

　△ABG＝（四角形ADCG）　…④

②③④より

$$（四角形EBGA）= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \cdots ⑤$$

①⑤より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

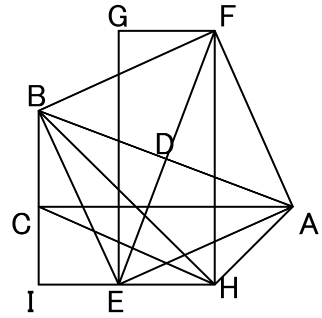
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 19］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、△ABC、△FEH、△EFGは合同であるとする。ただし、Dは線分ABの中点、かつ、線分EFの中点であり、FG// ACとする。△FEHは△ABCを90° 回転したものであるから



EF⊥AB

したがって［補題１］により

（四角形AEBF）$=\dfrac{c^2}{2}$　…①

図より

（四角形AEBF）＝（四角形AHBF）＋△BEH－△AEH　…②

BI// FHより△BFH＝△CFHであるから、［補題１］により

（四角形AHBF）＝（四角形AHCF）$=\dfrac{b^2}{2}$　…③

また、

$$\triangle BEH - \triangle AEH = \frac{EH \times BI}{2} - \frac{EH \times CI}{2} = \frac{EH(BI - CI)}{2} = \frac{EH \times BC}{2}$$

であるから、

△BEH－△AEH$=\dfrac{a^2}{2}$　…④

①②③④より

$$\frac{c^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

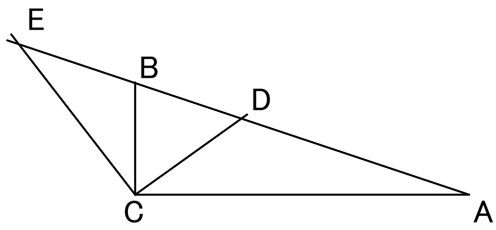
［証明 20］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90^\circ$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

辺AB上にD、辺ABのBの側の延長上にEをとって、$BD = BE = BC$を満たすようにする。

$BC = BD$より

$$\angle BCD = \angle BDC = 90^\circ - \frac{\angle CBD}{2}$$



したがって、

$$\angle ACD = \frac{\angle CBD}{2} \quad \cdots ①$$

さらに$BC = BE$より

$$\angle BCE = \angle BEC = \frac{\angle CBD}{2} \quad \cdots ②$$

①②より、$\triangle ACD \backsim \triangle AEC$であるから

$$AC : AE = AD : AC$$

ゆえに、

$$AC^2 = AE \times AD$$
$$b^2 = (c+a)(c-a)$$

整理すると

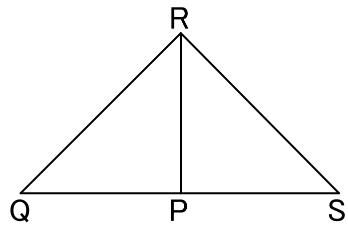
$$a^2 + b^2 = c^2$$

［補題２］

$\triangle$ PQR は $\angle P = 90°$ の直角二等辺三角形であるとする。このとき、$QR = \sqrt{2}PQ$ が成り立つ。

（証明）

辺 PQ の P の側の延長上に S をとり、$PS = PQ$ を満たすようにすると、三角形 QRS は $\angle R = 90°$ の直角二等辺三角形となる。したがって、



$$\triangle QRS = \frac{QR^2}{2}$$

一方で

$$\triangle QRS = 2\triangle PQR = PQ^2$$

ゆえに

$$\frac{QR^2}{2} = PQ^2$$

整理して

$$QR = \sqrt{2}PQ$$

［証明 21］

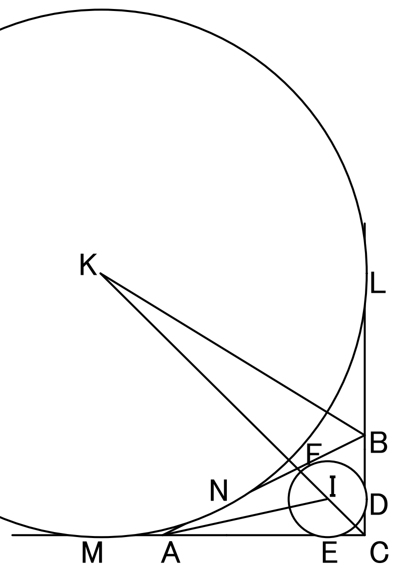
三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

三角形ABCの内心をI、$\angle C$の内部にある傍心をKとする。内接円Iの半径をr、傍接円Kの半径をsとする。内接円Iと辺BC、CA、ABとの接点をD、E、Fとし、傍接円Kと直線BC、CA、ABとの接点をL、M、Nとする。$AE = AF$、$BF = BD$、$CD = CE = r$より

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad \cdots ①$$

$AM = AN$、$BN = BL$、$CL = CM = s$より

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad \cdots ②$$



［補題２］により

$$CI = \sqrt{2}r、CK = \sqrt{2}s \quad \cdots ③$$

AIは$\angle CAB$を二等分するから、

$$\angle CAI = \frac{1}{2}\angle CAB \quad \cdots ④$$

BKは$\angle LBA$を二等分するから、

$$\angle LBK = \frac{1}{2}\angle LBA \quad \cdots ⑤$$

CKは$\angle BCA$を二等分するから、

$$\angle ICA = 45°、\angle BCK = 45° \quad \cdots ⑥$$

△ABC、△BCKにおいて、外角に関する定理より

$$\angle CAB + 90° = \angle LBA、\angle BKC + \angle BCK = \angle LBK \quad \cdots ⑦$$

④⑤⑥⑦より

$$\angle CKB = \angle LBK - 45° = \frac{1}{2}(\angle LBA - 90°) = \frac{1}{2}\angle CAB = \angle CAI \quad \cdots ⑧$$

⑥⑧より△ICA∽△BCKであるから

$$CI : CA = CB : CK$$

$$CI \times CK = CA \times CB$$

$$\sqrt{2}r \times \sqrt{2}s = ab$$

$$2rs = ab$$

$$\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2} = ab$$

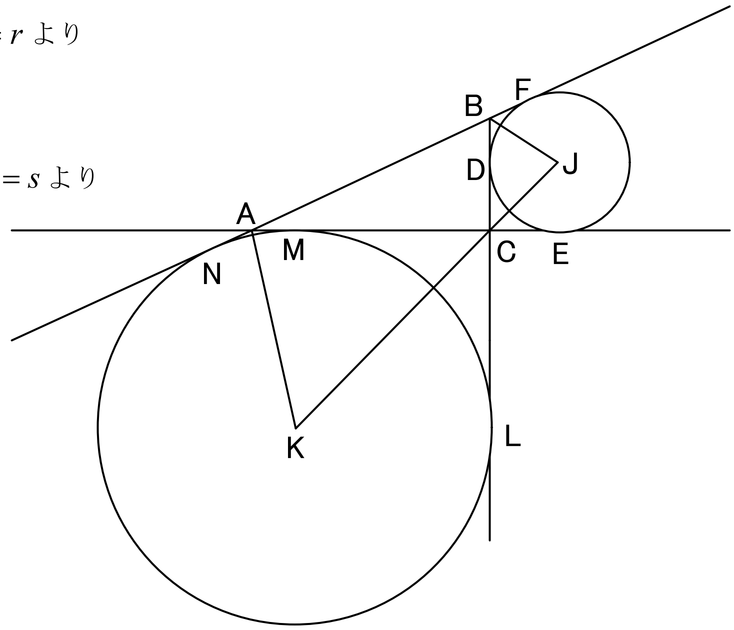
$$(a+b-c)(a+b+c) = 2ab$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 22］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90^\circ$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。$\angle A$の内部にある傍心をJ、$\angle B$の内部にある傍心をKとする。傍接円Jの半径をr、傍接円Kの半径をsとする。傍接円Jと直線BC、CA、ABとの接点をD、E、Fとし、傍接円Kと直線BC、CA、ABとの接点をL、M、Nとする。



$AE = AF$、$BF = BD$、$CD = CE = r$より

$$r = \frac{a - b + c}{2} \quad \cdots ①$$

$AM = AN$、$BN = BL$、$CL = CM = s$より

$$s = \frac{-a + b + c}{2} \quad \cdots ②$$

［補題２］により

$$CJ = \sqrt{2}r\text{、}CK = \sqrt{2}s \quad \cdots ③$$

AKは$\angle CAN$を二等分するから、

$$\angle CAK = \frac{1}{2}\angle CAN \quad \cdots ④$$

BJは$\angle CBF$を二等分するから、

$$\angle CBJ = \frac{1}{2}\angle CBF \quad \cdots ⑤$$

CK、CJは、それぞれ$\angle ACL$、$\angle BCE$を二等分するから、

$$\angle KCA = 45^\circ\text{、}\angle JCB = 45^\circ \quad \cdots ⑥$$

△ABCにおいて、外角に関する定理より

$$\angle CBF = \angle CAB + 90^\circ \quad \cdots ⑦$$

△ACKにおいて、内角の和を考えて

$$\angle CKA + \angle CAK + \angle ACK = 180^\circ \quad \cdots ⑧$$

④⑤⑥⑦⑧より

$$\angle CBJ = \frac{90^\circ + \angle CAB}{2} = 135^\circ - \frac{1}{2}\angle CAN = 135^\circ - \angle CAK = \angle CKA \quad \cdots ⑨$$

⑥⑨より△BCJ∽△KCAであるから

$$BC : KC = CJ : CA$$

$$KC \times CJ = BC \times CA$$

$$2rs = ab$$

$$\frac{(a - b + c)(-a + b + c)}{2} = ab$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 23］

三角形ABCにおいて$\angle C=90°$であるとし、$BC=a$、$CA=b$、$AB=c$とする（$b\geq a$）。

$$x=\frac{c-a}{2}、y=\frac{c+a}{2}$$

とし、Aを中心とし半径xの円、Bを中心とし半径yの円を描く。$x+y=c$より、この２円は外接する。この２円の共通外接線と円A、円Bとの交点をD、Eとし、円Aと円Bの接点Fにおける共通内接線と直線DEとの交点をGとする。ただし、D、Eは直線ABに関してCと同じ側にあるものとする。接線の性質より

$\angle GDA=\angle GFA=90°$　…①　　$GD=GF$　…②

$\angle GEB=\angle GFB=90°$　…③　　$GE=GF$　…④

①、$AF=AD$、$AG=AG$より$\triangle AFG\equiv\triangle ADG$であるから、

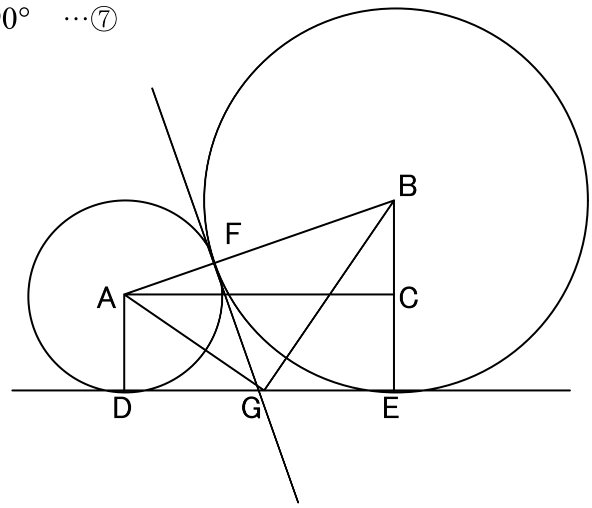
$$\angle AGD=\angle AGF=\frac{1}{2}\angle FGD\quad\cdots⑤$$

同様にして③より

$$\angle BGE=\angle BGF=\frac{1}{2}\angle FGE\quad\cdots⑥$$

⑤⑥より

$$\angle AGD+\angle BGE=\frac{1}{2}(\angle FGD+\angle FGE)=90°\quad\cdots⑦$$



$\triangle BGE$において、内角の和を考えると、③より

$\angle GBE+\angle BGE=90°$　…⑧

⑦⑧より

$\angle AGD=\angle GBE$　…⑨

①③⑨より$\triangle AGD\backsim\triangle GBE$であるから、

$AD:GE=GD:BE$

$AD\times BE=GE\times GD$　…⑩

四角形ADECは長方形であるから、

$DE=AC=b$　…⑪

②④⑪より

$$GD=GF=GE=\frac{1}{2}b\quad\cdots⑫$$

⑩⑫より

$$xy=\frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{(c+a)(c-a)}{4}=\frac{1}{4}b^2$$

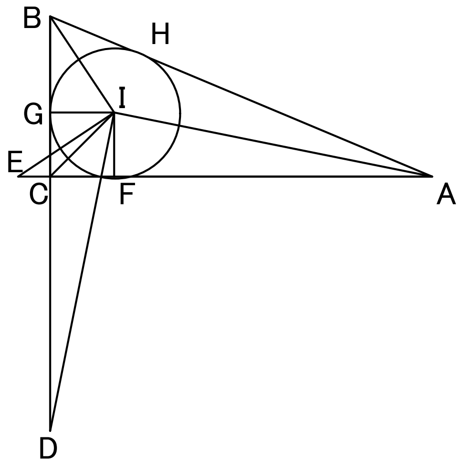
整理すると

$a^2+b^2=c^2$

［証明 24］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$とする（$b \geq a$）。

三角形ABCの内心をI、内接円Iと辺CA、BC、ABとの接点をF、G、Hとする。辺BCのCの側の延長上にBD＝BAを満たす点Dをとり、辺ACのCの側の延長上にAE＝ABを満たす点Eをとる。



AIは∠BACを二等分するから

$$\angle BAI = \angle CAI = \frac{1}{2}\angle BAC \quad \cdots ①$$

BIは∠ABCを二等分するから

$$\angle ABI = \angle DBI = \frac{1}{2}\angle ABC \quad \cdots ②$$

CIは∠ACBを二等分するから

$$\angle ACI = \angle BCI = 45° \quad \cdots ③$$

①②より

$$\begin{aligned} &\angle AIB \\ &= 180° - (\angle ABI + \angle BAI) \\ &= 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) \\ &= 180° - \frac{90°}{2} \\ &= 135° \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

③より

$$\angle ICD = \angle ICE = 135° \quad \cdots ⑤$$

①とAB＝AE、AI＝AIより△ABI≡△AEIであるから

$$\angle AEI = \angle ABI \quad \cdots ⑥$$

④⑤⑥より

$$\triangle ABI \backsim \triangle IEC \quad \cdots ⑦$$

同様にして

$$\triangle ABI \backsim \triangle DIC \quad \cdots ⑧$$

⑦⑧より

$$\triangle IEC \backsim \triangle DIC \quad \cdots ⑨$$

⑨より

$$IC : DC = EC : IC$$

$$IC^2 = DC \times EC \quad \cdots ⑩$$

CF＝CG、AF＝AH、BH＝BGより

$$CF = CG = \frac{1}{2}(a + b - c) \quad \cdots ⑪$$

四角形CGIFは正方形であるから［補題２］より

$$\mathrm{CI}=\sqrt{2}\mathrm{CF} \quad \cdots⑫$$

⑩⑪⑫より

$$\frac{1}{2}(a+b-c)^2=(c-a)(c-b)$$

整理すると

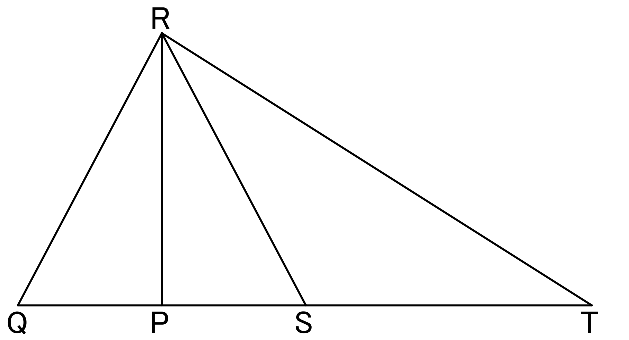
$$a^2+b^2=c^2$$

［補題３］

三角形 PQR において、$\angle P = 90°$ 、$\angle Q = 60°$ であるとする。このとき、

$$QR = 2PQ、RP = \sqrt{3}PQ$$

（証明）



辺 PQ の P の側の延長上に、$PS = PQ$、$PT = 3PQ$ を満たす点 S 、T をとる。$\triangle PQR \equiv \triangle PSR$ であり、三角形 QRS は正三角形になるから、

$QR = RS = SQ = 2PQ$　…①

$\angle RSP = 60°$　…②

①より

$SR = ST$　…③

②③より、

$\angle STR = \angle SRT = 30°$　…④

また、

$\angle TPS = 90°$　…⑤

④⑤とより

$\angle TRP = 60°$　…⑥

⑤⑥より、$\triangle PQR \backsim \triangle PRT$ であるから

$PQ : PR = PR : PT$

$PQ \times PT = PR^2$　…⑦

⑦と $PT = 3PQ$ より

$3PQ^2 = PR^2$　…⑧

①⑧より

$QR = 2PQ$、$RP = \sqrt{3}PQ$

［補題４］

一辺が x の正三角形の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ である。

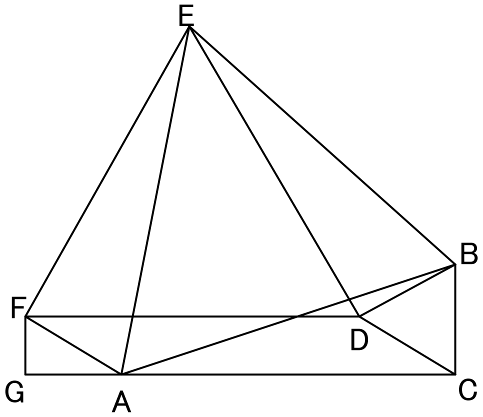
（証明）

［補題 3］より、この正三角形の高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ であるから、明らか。

［証明 25］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$ 、$CA = b$ 、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図で三角形 BCD、三角形 ABE は正三角形であるとし、四角形 FDCA は平行四辺形であるとする。また $\angle FGA = 90°$ であるとする。



三角形 EBD は三角形 ABC を 60° 回転したものであり、四角形 FDCA は平行四辺形であるから

$\triangle ABC \equiv \triangle EBD$　…①

$ED = AC = FD = b$　…②

$\angle EDF = 60°$　…③

②③より

$ED = FD = EF = b$　…④

三角形 BDC は正三角形であるから

$BC = CD = a$　…⑤

$\angle BCD = 60°$　…⑥

四角形 FDCA は平行四辺形であるから

$CD = FA$　…⑦

⑤⑦より、

$FA = a$　…⑧

三角形 ABE は正三角形であるから、

$AB = AE = c$　…⑨

④⑧⑨より、

$\triangle ABC \equiv \triangle EAF$　…⑩

⑥より

$\angle DCA = 30°$　…⑪

$CD // AF$ より

$\angle FAG = \angle DCA$　…⑫

⑪⑫より

$\angle FAG = 30°$　…⑬

⑬と $\angle FGA = 90°$ より、［補題３］を用いると

$GF = \frac{1}{2}FA$　…⑭

⑧⑭より

$GF = \frac{1}{2}a$　…⑮

したがって、

（平行四辺形 FDCA）$= \frac{1}{2}ab = \triangle ABC$　…⑯

図より、

（五角形 BCAFE）$= \triangle BDE + \triangle EDF + \triangle BDC +$（平行四辺形 FDCA）　…⑰

であり、

（五角形BCAFE）＝△ABE＋△EAF＋△ABC　…⑱

であるから、①⑩⑯⑰⑱より

△EDF＋△BDC＝△ABE　…⑲

仮定と④より、△EDF、△BDC、△ABEは、それぞれ、一辺がb、a、cの正三角形であるから、［補題４］より

$$\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

整理すると

$$a^2+b^2=c^2$$

［補題５］

三角形 PQR において、$QR = x$ 、$RP = y$、$PQ = z$ 、$\angle R = 45°$ とする。このとき、

$$z^2 = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形 PQTS、 QRVU 、 RPXW は正方形であるとし、 $RI \perp TS$ 、 $PK \perp UV$ 、 $QM \perp WX$ であるとする。 RI と PQ との交点を H 、PK と QR との交点を J 、QM と RP との交点を L とする。また、 V から直線 RP に下ろした垂線の足を N とする。

四角形 TIHQは長方形であるから、

（四角形 TIHQ）＝2△ TQH＝2△ TQR　…①

三角形 PQU は三角形 TQR を 90° 回転したものであるから、

△ PQU＝△ TQR　…②

四角形 KUQJ は長方形であるから、

（四角形 KUQJ）＝2△ JQU＝2△ PQU　…③

①②③より

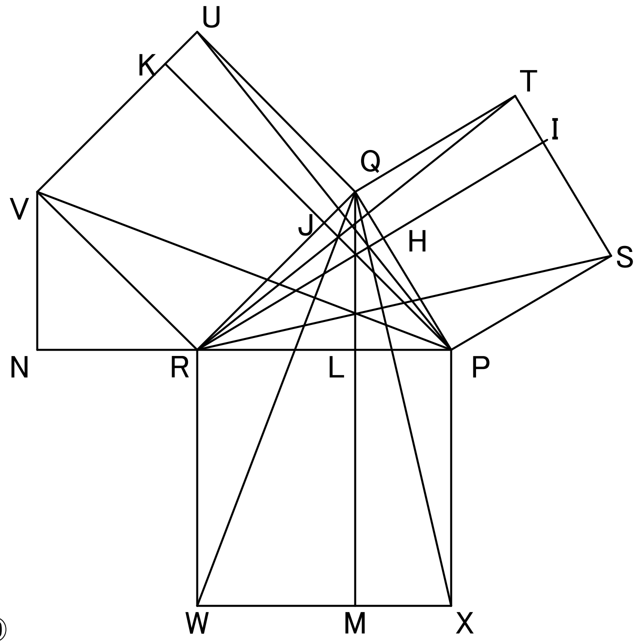
（四角形 TIHQ）＝（四角形 KUQJ）　…④

四角形 KJRV は長方形であるから、

（四角形 KJRV ）＝2△ VRJ＝2△ VRP　…⑤

$\angle VRN = 45°$ であるから、［補題３］より

$$VN = \frac{1}{\sqrt{2}}x \quad \cdots ⑥$$



⑥より

$$\triangle VRP = \frac{1}{2\sqrt{2}}xy \quad \cdots ⑦$$

⑤⑦より

$$（四角形 KJRV）= \frac{1}{\sqrt{2}}xy \quad \cdots ⑧$$

四角形 UVRQは一辺が x の正方形だから、

（四角形 UVRQ）＝ x^2　…⑨

④⑧⑨より

$$（四角形 TIHQ）= x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}xy \quad \cdots ⑩$$

同様にして

$$（四角形 SIHP）= y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}xy \quad \cdots ⑪$$

四角形 QPSTは正方形だから

（四角形 QPST）＝ z^2　…⑫

⑩⑪⑫より

$$z^2=\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)+\left(y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)$$

整理すると

$$z^2=x^2+y^2-\sqrt{2}xy$$

（注）

上の証明は三角形PQRが鋭角三角形のときの証明である。鈍角三角形のとき、例えば、$\angle$Qが鈍角のときは、

（四角形QPST）＝（四角形PSIH）－（四角形TIHQ）

（四角形UVRQ）＝（四角形KJRV）－（四角形KUQJ）

となるが、他は同様である。

［証明 26］

三角形ABCにおいて$\angle\mathrm{C}=90°$であるとし、$\mathrm{BC}=a$、$\mathrm{CA}=b$、$\mathrm{AB}=c$とする（$b\geq a$）。

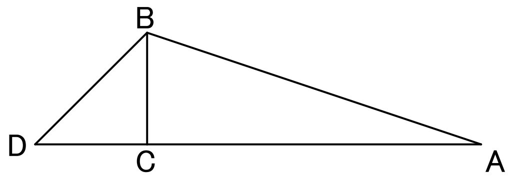
この図において、三角形BCDはBC＝CDの直角二等辺三角形であるとする。［補題２］より

$$\mathrm{BD}=\sqrt{2}a$$

$\angle\mathrm{BDC}=45°$であり、

$\mathrm{BD}=\sqrt{2}a$、$\mathrm{DA}=a+b$、$\mathrm{AB}=c$

であるから、［補題５］より



$$c^2=\left(\sqrt{2}a\right)^2+(a+b)^2-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}a(a+b)$$

整理すると

$$a^2+b^2=c^2$$

［補題６］

三角形PQRにおいて、$QR=x$、$RP=y$、$PQ=z$、$\angle R=60°$とする。このとき、

$$z^2=x^2+y^2-xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形PQTS、QRVU、RPXWは正方形であるとし、$RI\perp TS$、$PK\perp UV$、$QM\perp WX$であるとする。RIとPQとの交点をH、PKとQRとの交点をJ、QMとRPとの交点をLとする。また、Vから直線RPに下ろした垂線の足をNとする。

四角形TIHQは長方形であるから、

（四角形TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形PQUは三角形TQRを90°回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形KUQJは長方形であるから、

（四角形KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

（四角形TIHQ）＝（四角形KUQJ）　…④

四角形KJRVは長方形であるから、

（四角形KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle VRN=30°$であるから、［補題３］より

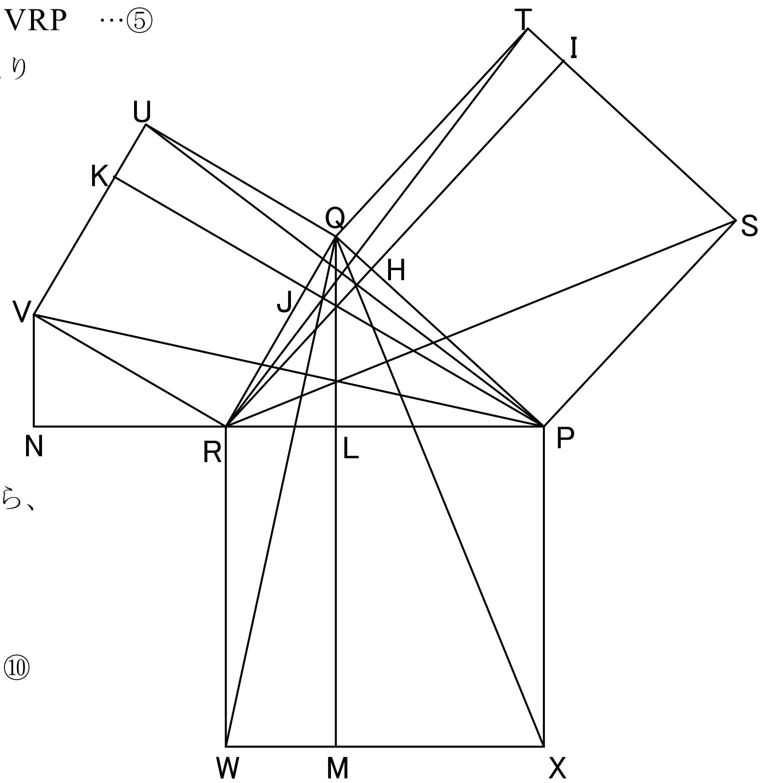
$VN=\frac{1}{2}x$　…⑥

⑥より

△VRP$=\frac{1}{4}xy$　…⑦

⑤⑦より

（四角形KJRV）$=\frac{1}{2}xy$　…⑧



四角形UVRQは一辺がxの正方形だから、

（四角形UVRQ）$=x^2$　…⑨

④⑧⑨より

（四角形TIHQ）$=x^2-\frac{1}{2}xy$　…⑩

同様にして

（四角形SIHP）$=y^2-\frac{1}{2}xy$　…⑪

四角形QPSTは正方形だから

（四角形QPST）$=z^2$　…⑫

⑩⑪⑫より

$$z^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}xy\right) + \left(y^2 - \frac{1}{2}xy\right)$$

整理すると

$$z^2 = x^2 + y^2 - xy$$

（注）

上の証明は三角形PQRが鋭角三角形のときの証明である。鈍角三角形のとき、例えば、$\angle$Qが鈍角のときは、

（四角形QPST）＝（四角形PSIH）－（四角形TIHQ）

（四角形UVRQ）＝（四角形KJRV）－（四角形KUQJ）

となるが、他は同様である。

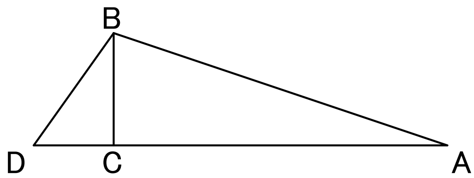
［証明 27］

三角形ABCにおいて$\angle \mathrm{C} = 90°$であるとし、$\mathrm{BC} = a$、$\mathrm{CA} = b$、$\mathrm{AB} = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、三角形BCDは$\angle \mathrm{BCD} = 90°$、$\angle \mathrm{BDC} = 60°$の直角三角形であるとする。

［補題３］より

$$\mathrm{CD} = \frac{a}{\sqrt{3}}、\mathrm{BD} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$



$\angle \mathrm{BDC} = 60°$であり、

$$\mathrm{BD} = \frac{2a}{\sqrt{3}}、\mathrm{DA} = \frac{a}{\sqrt{3}} + b、\mathrm{AB} = c$$

であるから、［補題６］より

$$c^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + b\right)^2 - \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + b\right)$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［補題７］

三角形PQRにおいて、$QR=x$、$RP=y$、$QR=z$、$\angle R=30^\circ$とする。このとき、

$$z^2=x^2+y^2-\sqrt{3}xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形PQTS、QRVU、RPXWは正方形であるとし、$RI\perp TS$、$PK\perp UV$、$QM\perp WX$であるとする。RIとPQとの交点をH、PKとQRとの交点をJ、QMとRPとの交点をLとする。また、Vから直線RPに下ろした垂線の足をNとする。

四角形TIHQは長方形であるから、

（四角形TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形PQUは三角形TQRを90°回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形KUQJは長方形であるから、

（四角形KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

（四角形TIHQ）＝（四角形KUQJ）　…④

四角形KJRVは長方形であるから、

（四角形KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle VRN=60^\circ$であるから、［補題３］より

$$VN=\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \cdots⑥$$

⑥より

$$\triangle VRP=\frac{\sqrt{3}}{4}xy \quad \cdots⑦$$

⑤⑦より

$$（四角形KJRV）=\frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad \cdots⑧$$

四角形UVRQは一辺がxの正方形だから、

（四角形UVRQ）＝x^2　…⑨

④⑧⑨より

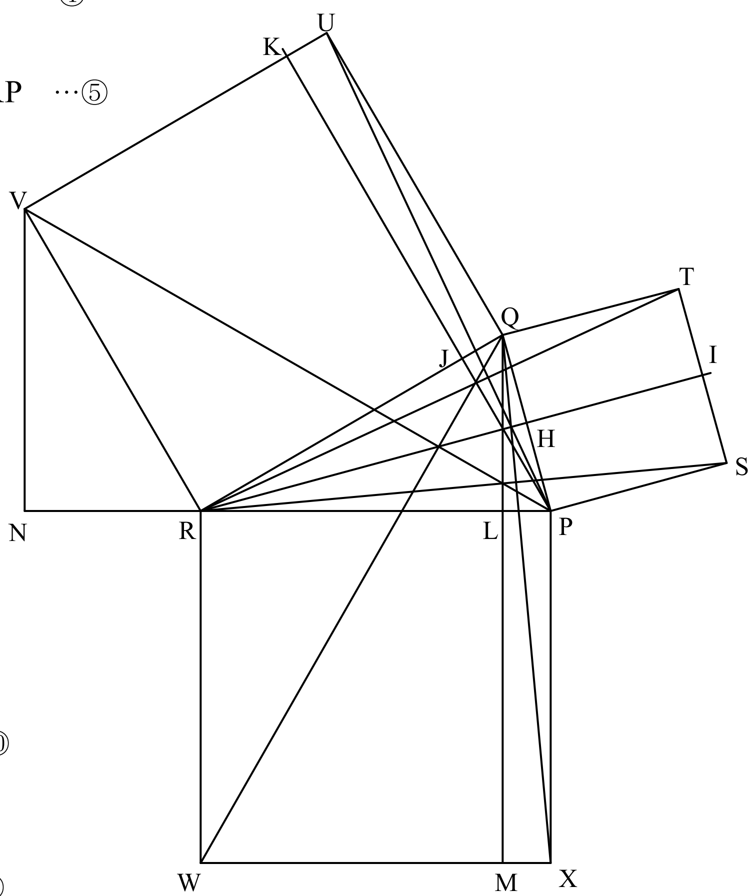
$$（四角形TIHQ）=x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad \cdots⑩$$

同様にして

$$（四角形SIHP）=y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad \cdots⑪$$

四角形QPSTは正方形だから

（四角形QPST）＝z^2　…⑫



⑩⑪⑫より

$$z^2=\left(x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}xy\right)+\left(y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}xy\right)$$

整理すると

$$z^2=x^2+y^2-\sqrt{3}xy$$

（注）

上の証明は三角形PQRが鋭角三角形のときの証明である。鈍角三角形のとき、例えば、∠Qが鈍角のときは、

（四角形QPST）＝（四角形PSIH）－（四角形TIHQ）

（四角形UVRQ）＝（四角形KJRV）－（四角形KUQJ）

となるが、他は同様である。

［証明 28］

三角形ABCにおいて $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ であるとし、$\mathrm{BC}=a$、$\mathrm{CA}=b$、$\mathrm{AB}=c$ とする（$b\geq a$）。この図において、三角形BCDは $\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$、$\angle\mathrm{BDC}=30^\circ$ の直角三角形であるとする。

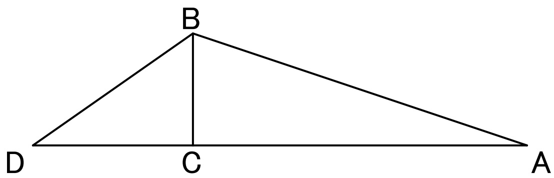
［補題３］より

$\mathrm{CD}=\sqrt{3}a$、$\mathrm{BD}=2a$

$\angle\mathrm{BDC}=30^\circ$ であり、

$\mathrm{BD}=2a$、$\mathrm{DA}=\sqrt{3}a+b$、$\mathrm{AB}=c$

であるから、［補題７］より



$$c^2=(2a)^2+\left(\sqrt{3}a+b\right)^2-\sqrt{3}\cdot 2a\cdot\left(\sqrt{3}a+b\right)$$

整理すると

$$a^2+b^2=c^2$$

［補題８］

三角形PQRにおいて、$QR=x$、$RP=y$、$PQ=z$、$\angle R=120°$とする。このとき、

$$z^2=x^2+y^2+xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形PQTS、QRVU、RPXWは正方形であるとし、$RI\perp TS$、$PK\perp UV$、$QM\perp WX$であるとする。RIとPQとの交点をH、PKとQRとの交点をJ、QMとRPとの交点をLとする。また、Vから直線RPに下ろした垂線の足をNとする。

四角形TIHQは長方形であるから、

（四角形TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形PQUは三角形TQRを90°回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形KUQJは長方形であるから、

（四角形KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

（四角形TIHQ）＝（四角形KUQJ）　…④

四角形KJRVは長方形であるから、

（四角形KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle VRN=30°$であるから、［補題３］より

$$VN=\frac{1}{2}x \quad …⑥$$

⑥より

$$\triangle VRP=\frac{1}{4}xy \quad …⑦$$

⑤⑦より

（四角形KJRV）$=\frac{1}{2}xy$　…⑧

四角形UVRQは一辺がxの正方形だから、

（四角形UVRQ）$=x^2$　…⑨

④⑧⑨より

（四角形TIHQ）$=x^2+\frac{1}{2}xy$　…⑩

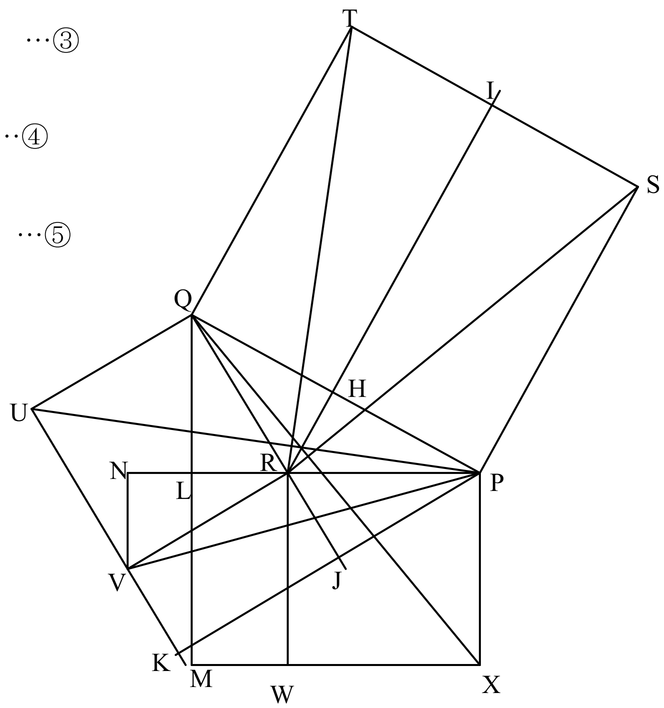
同様にして

（四角形SIHP）$=y^2+\frac{1}{2}xy$　…⑪

四角形QPSTは正方形だから

（四角形QPST）$=z^2$　…⑫

⑩⑪⑫より



$$z^2 = \left(x^2 + \frac{1}{2}xy\right) + \left(y^2 + \frac{1}{2}xy\right)$$

整理すると

$$z^2 = x^2 + y^2 + xy$$

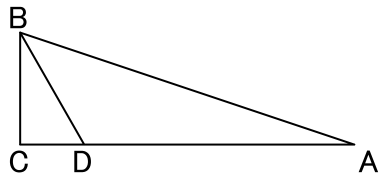
［証明 29］

三角形ABCにおいて$\angle \mathrm{C} = 90°$であるとし、$\mathrm{BC} = a$、$\mathrm{CA} = b$、$\mathrm{AB} = c$とする（$b \geq a$）。

この図において、三角形BCDは$\angle \mathrm{BCD} = 90°$、$\angle \mathrm{BDC} = 60°$の直角三角形であるとする。

［補題３］より

$$\mathrm{CD} = \frac{a}{\sqrt{3}}、\mathrm{BD} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$



$\angle \mathrm{BDA} = 120°$であり、

$$\mathrm{BD} = \frac{2a}{\sqrt{3}}、\mathrm{DA} = b - \frac{a}{\sqrt{3}}、\mathrm{AB} = c$$

であるから、［補題８］より

$$c^2 = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(b - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［補題９］

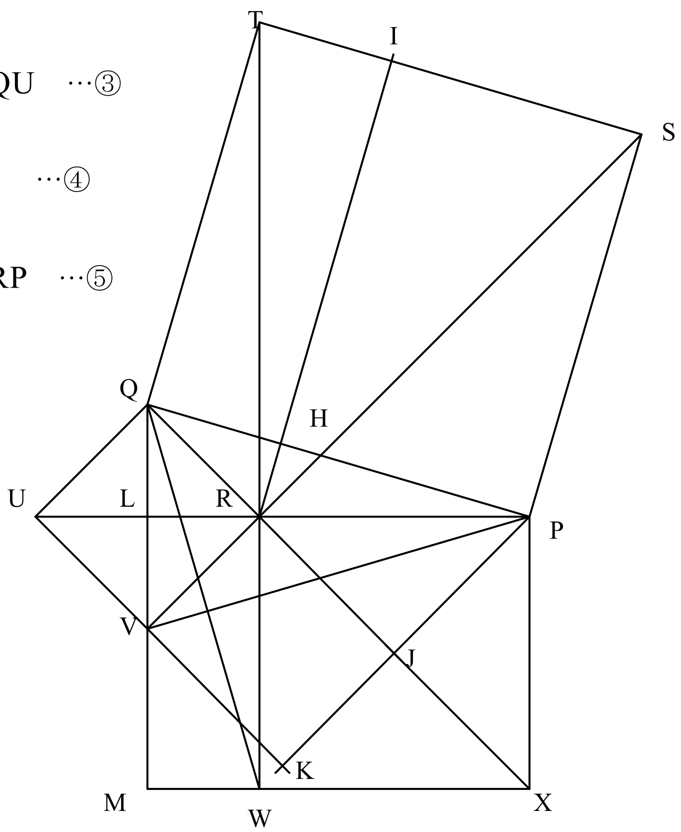
三角形PQRにおいて、$\mathrm{QR}=x$、$\mathrm{RP}=y$、$\mathrm{PQ}=z$、$\angle\mathrm{R}=135°$とする。このとき、

$$z^2=x^2+y^2+\sqrt{2}xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形PQTS、QRVU、RPXWは正方形であるとし、$\mathrm{RI}\perp\mathrm{TS}$、$\mathrm{PK}\perp\mathrm{UV}$、$\mathrm{QM}\perp\mathrm{WX}$であるとする。RIとPQとの交点をH、PKとQRとの交点をJ、QMとRPとの交点をLとする。



四角形TIHQは長方形であるから、

（四角形TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形PQUは三角形TQRを90°回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形KUQJは長方形であるから、

（四角形KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

（四角形TIHQ）＝（四角形KUQJ）　…④

四角形KJRVは長方形であるから、

（四角形KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle\mathrm{VRL}=45°$であるから、［補題２］より

$$\mathrm{VL}=\frac{1}{\sqrt{2}}x\quad\cdots⑥$$

⑥より

$$\triangle\mathrm{VRP}=\frac{1}{2\sqrt{2}}xy\quad\cdots⑦$$

⑤⑦より

（四角形KJRV）$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}xy$　…⑧

四角形UVRQは一辺がxの正方形だから、

（四角形UVRQ）$=x^2$　…⑨

④⑧⑨より

（四角形TIHQ）$=x^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}xy$　…⑩

同様にして

（四角形SIHP）$=y^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}xy$　…⑪

四角形QPSTは正方形だから

（四角形QPST）$=z^2$　…⑫

⑩⑪⑫より

$$z^2=\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)+\left(y^2+\frac{1}{\sqrt{2}}xy\right)$$

整理すると

$$z^2=x^2+y^2+\sqrt{2}xy$$

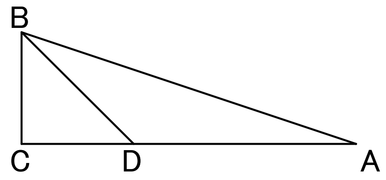
［証明 30］

三角形ABCにおいて $\angle\mathrm{C}=90°$ であるとし、$\mathrm{BC}=a$ 、$\mathrm{CA}=b$ 、$\mathrm{AB}=c$ とする（$b\geq a$）。

この図において、三角形BCDは $\angle\mathrm{BCD}=90°$ 、$\angle\mathrm{BDC}=45°$ の直角三角形であるとする。

［補題２］より

$\mathrm{CD}=a$ 、$\mathrm{BD}=\sqrt{2}a$



$\angle\mathrm{BDA}=135°$ であり、

$\mathrm{BD}=\sqrt{2}a$ 、$\mathrm{DA}=b-a$ 、$\mathrm{AB}=c$

であるから、［補題９］より

$$c^2=\left(\sqrt{2}a\right)^2+(b-a)^2+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}a\right)(b-a)$$

整理すると

$$a^2+b^2=c^2$$

［補題 10］

三角形PQRにおいて、$\mathrm{QR}=x$、$\mathrm{RP}=y$、$\mathrm{PQ}=z$、$\angle\mathrm{R}=150°$とする。このとき、

$$z^2=x^2+y^2+\sqrt{3}xy$$

が成り立つ。

（証明）

この図で四角形PQTS、QRVU、RPXWは正方形であるとし、$\mathrm{RI}\perp\mathrm{TS}$、$\mathrm{PK}\perp\mathrm{UV}$、$\mathrm{QM}\perp\mathrm{WX}$であるとする。RIとPQとの交点をH、PKとQRとの交点をJ、QMとRPとの交点をLとする。また、Vから直線RPに下ろした垂線の足をNとする。

四角形TIHQは長方形であるから、

（四角形TIHQ）＝2△TQH＝2△TQR　…①

三角形PQUは三角形TQRを90°回転したものであるから、

△PQU＝△TQR　…②

四角形KUQJは長方形であるから、

（四角形KUQJ）＝2△JQU＝2△PQU　…③

①②③より

（四角形TIHQ）＝（四角形KUQJ）　…④

四角形KJRVは長方形であるから、

（四角形KJRV）＝2△VRJ＝2△VRP　…⑤

$\angle\mathrm{VRN}=60°$であるから、［補題３］より

$$\mathrm{VN}=\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad …⑥$$

⑥より

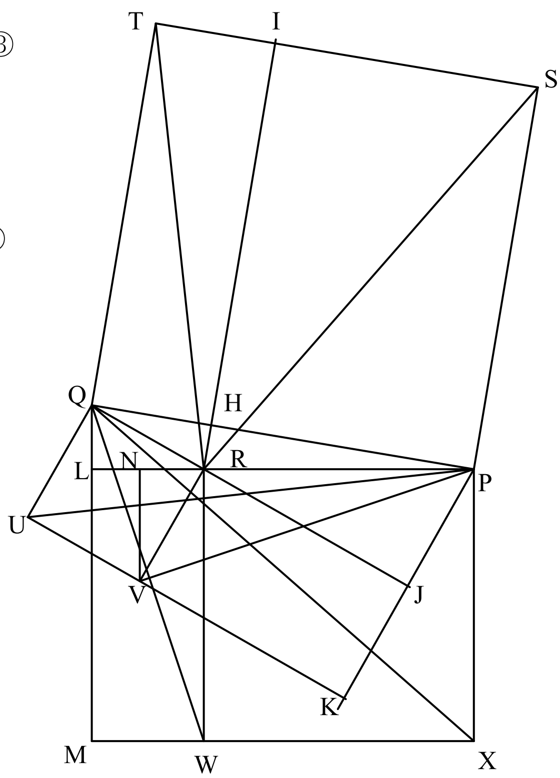
$$△\mathrm{VRP}=\frac{\sqrt{3}}{4}xy \quad …⑦$$

⑤⑦より

$$（四角形\mathrm{KJRV}）=\frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad …⑧$$

四角形UVRQは一辺がxの正方形だから、

（四角形UVRQ）＝x^2　…⑨



④⑧⑨より

$$（四角形\mathrm{TIHQ}）=x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad …⑩$$

同様にして

$$（四角形\mathrm{SIHP}）=y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}xy \quad …⑪$$

四角形QPSTは正方形だから

（四角形QPST）＝z^2　…⑫

⑩⑪⑫より

$$z^2 = \left(x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy\right) + \left(y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy\right)$$

整理すると

$$z^2 = x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy$$

［証明 31］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとし、$BC = a$、$CA = b$、$AB = c$ とする（$b \geq a$）。

この図において、三角形 BCD は $\angle BCD = 90°$、$\angle BDC = 30°$ の直角三角形であるとする。

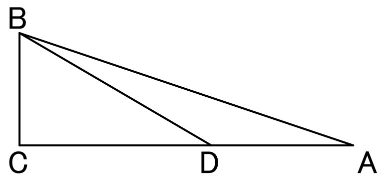
［補題２］より

$CD = \sqrt{3}a$、$BD = 2a$

$\angle BDA = 150°$ であり、

$BD = 2a$、$DA = b - \sqrt{3}a$、$AB = c$

であるから、［補題 10］より



$$c^2 = (2a)^2 + \left(b - \sqrt{3}a\right)^2 + \sqrt{3} \cdot 2a\left(b - \sqrt{3}a\right)$$

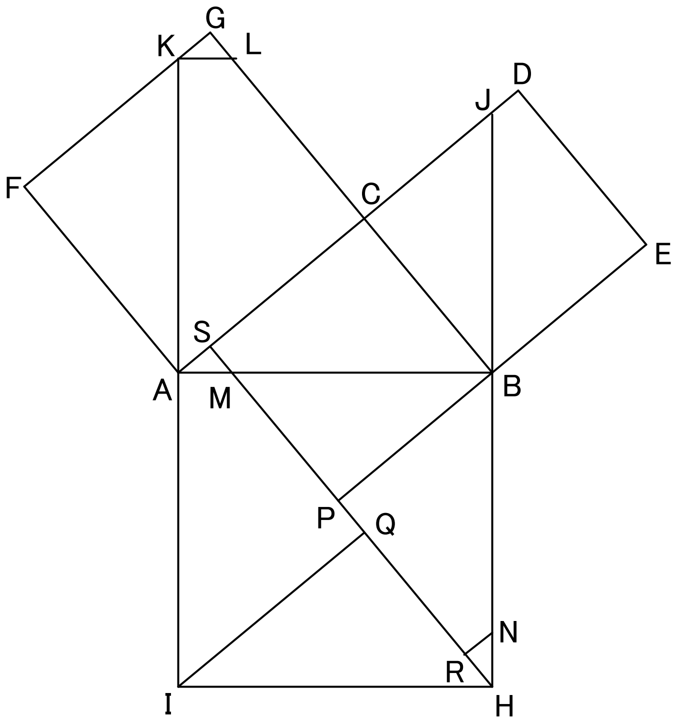
整理すると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

［証明 32］

※この証明を論理的に厳密に行うには、何回か三角形、四角形の合同を証明しなくてはなりません。以下では、直感的な分かりやすさを重視して、この証明を行いません。

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ 、$BC < CA$ であるとする。辺 AB を一辺とする正方形 ABHI を三角形 ABC の外側につくる。辺 BC を一辺とする正方形 BCDE を三角形 ABC の外側につくる。辺 CA を一辺とする正方形 CAFG を三角形 ABC の外側につくる。直線 BH と直線 CD との交点を J とし、直線 AI と直線 FG との交点を K とする。点 K を通り、直線 AB に平行な直線と直線 CG との交点を L とする。点 H を通り直線 BC に平行な直線と直線 AB との交点を M とする。直線 HM と直線 BE との交点を P とする。点 I から直線 HM に下ろした垂線の足を Q とする。線分 PH 上に $PR = BC$ を満たす点 R をとる。点 R を通り直線 AC に平行な直線と直線 BH との交点を N とする。直線 HM と直線 CA との交点を S とする。



次の図形の組は合同である。

△AKF と△IHQ

△KLG と△HNR

△BJC と△BMP

四角形 KACL と四角形 AIQM

四角形 JBED と四角形 NBPR

以上より

（四角形 ABHI）＝（四角形 BCDE）＋（四角形 CAFG）

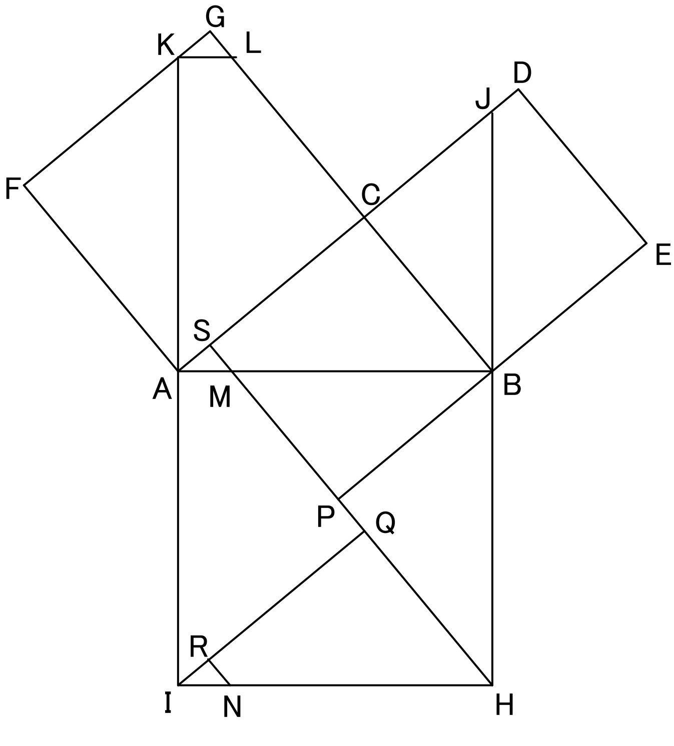
ゆえに

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

［証明 33］

※この証明を論理的に厳密に行うには、何回か三角形、四角形の合同を証明しなくてはなりません。以下では、直感的な分かりやすさを重視して、この証明を行いません。

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$、$BC < CA$であるとする。辺ABを一辺とする正方形ABHIを三角形ABCの外側につくる。辺BCを一辺とする正方形BCDEを三角形ABCの外側につくる。辺CAを一辺とする正方形CAFGを三角形ABCの外側につくる。直線BHと直線CDとの交点をJとし、直線AIと直線FGとの交点をKとする。点Kを通り、直線ABに平行な直線と直線CGとの交点をLとする。点Hを通り直線BCに平行な直線と直線ABとの交点をMとする。直線HMと直線BEとの交点をPとする。点Iから直線HMに下ろした垂線の足をQとする。線分IQ上に$IR = KG$を満たす点Rをとる。点Rを通り直線BCに平行な直線と直線IHとの交点をNとする。直線HMと直線CAとの交点をSとする。



次の図形の組は合同である。

△AKFと△HBP

△KLGと△INR

△BJCと△BMP

四角形KACLと四角形AIQM

四角形JBEDと四角形NHQR

以上より

（四角形ABHI）＝（四角形BCDE）＋（四角形CAFG）

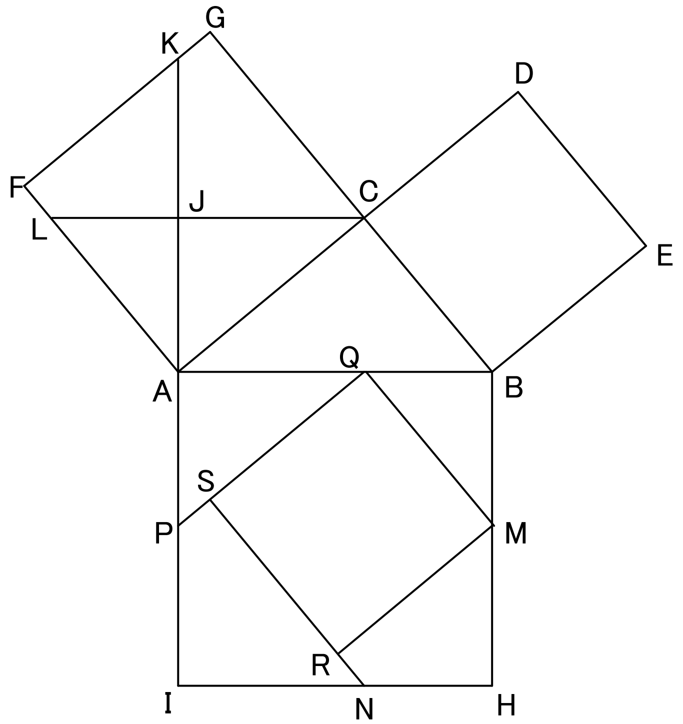
ゆえに

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

［証明 34］

※この証明を論理的に厳密に行うには、何回か三角形、四角形の合同を証明しなくてはなりません。以下では、直感的な分かりやすさを重視して、この証明を行いません。

三角形ABCにおいて$\angle C = 90^\circ$、$BC < CA$であるとする。辺ABを一辺とする正方形ABHIを三角形ABCの外側につくる。辺BCを一辺とする正方形BCDEを三角形ABCの外側につくる。辺CAを一辺とする正方形CAFGを三角形ABCの外側につくる。直線AIと直線FGとの交点をK、点Cを通り直線ABに平行な直線と直線AFとの交点をLとする。直線AKと直線CLとの交点をJとする。線分AI上に$AP = JA$を満たす点Pをとる。線分IH上に$IN = JC$を満たす点Nをとる。線分HB上に$HM = JK$を満たす点Mをとる。線分BA上に$BQ = JL$を満たす点Qをとる。線分QP上に$QS = DC$を満たす点Sをとる。線分SN上に$SR = CB$を満たす点Rをとる。



次の図形の組は合同である。

△APQと△JAC

四角形PINSと四角形KJCG

四角形NHMRと四角形LJKF

△MBQと△AJL

四角形RSQMと四角形BCDE

以上より

（四角形ABHI）＝（四角形BCDE）＋（四角形CAFG）

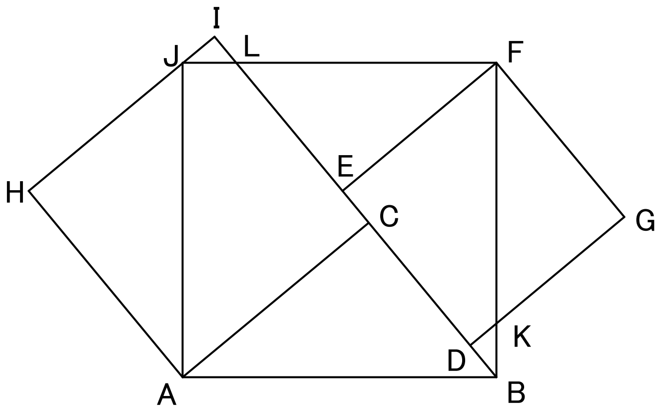
ゆえに

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

［証明 35］

※この証明を論理的に厳密に行うには、何回か三角形の合同を証明しなくてはなりません。以下では、直感的な分かりやすさを重視して、この証明を行いません。

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$、$BC < CA$であるとする。辺ABを一辺とする正方形ABFJをつくる（ただし、直線ABに関して点Cと同じ側につくるものとする）。辺CAを一辺とする正方形CAHIをつくる（ただし、直線CAに関してBと反対の側につくるものとする）。点Fから直線BCに下ろした垂線の足をEとする。EFを一辺とする正方形EFGDをつくる（ただし、直線EFに関して点Bと同じ側に作るものとする）。



次の図形の組は合同である。

△ABCと△AJH

△FELと△FGK

△BDKと△JIL

したがって

（四角形ABFJ）＝（四角形EFGD）＋（四角形CAHI）

仮定より

（四角形ABFJ）$= AB^2$

（四角形CAHI）$= CA^2$

また、△ABCと△BFEは合同であるから

$FE = BC$

したがって

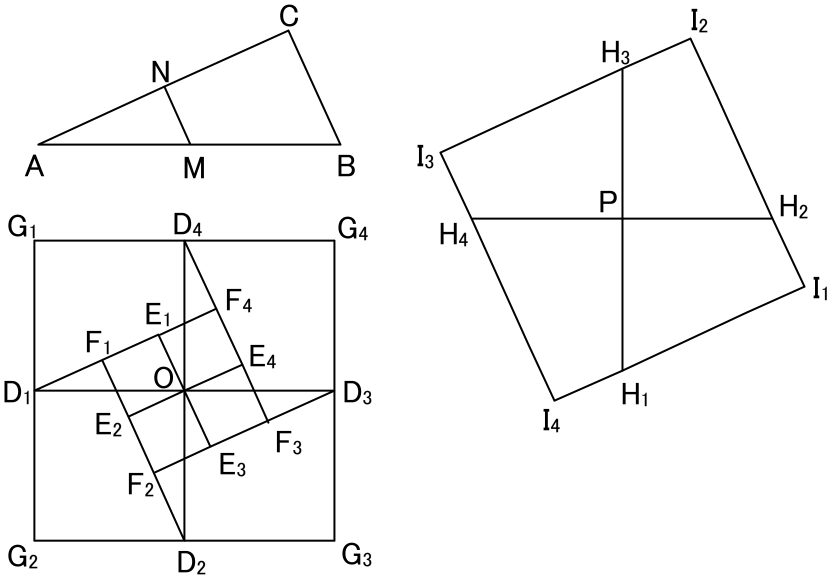
（四角形EFGD）$= BC^2$

以上より

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

［証明 36］

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$、$BC < CA$であるとする。辺AB、ACの中点をそれぞれM、Nとする。一辺が線分ABの長さと等しい正方形$G_1G_2G_3G_4$をつくる。それぞれの辺の中点D_1、D_2、D_3、D_4を図のようにとる。直線D_1D_3と直線D_2D_4との交点をOとする。三角形AMNと合同な三角形D_1OE_1、D_2OE_2、D_3OE_3、D_4OE_4を図のようにつくる。直線D_1E_1と直線D_2E_2との交点をF_1とする。図のようにF_2、F_3、F_4も同様に定める。平面上に点Pをとり、四角形$G_1D_1F_4D_4$の頂点G_1が点Pに重なるようにおき、これを四角形$PH_1I_1H_2$とする。次に四角形$G_2D_2F_1D_1$を辺G_2D_2が線分PH_2と重なるようにおき、これを四角形$PH_2I_2H_3$とする。次に四角形$G_3D_3F_2D_2$を辺G_3D_3が線分PH_3と重なるようにおき、これを四角形$PH_3I_3H_4$とする。次に四角形$G_4D_4F_3D_3$を辺G_4D_4が線分PH_4に重なるようにおき、これを四角形$PH_4I_4H_1$とする。（以下で示すように$PH_1 = G_4D_3 = AM$かつ$\angle H_1PH_4 = \angle D_3G_4D_4 = 90°$であるから$G_4D_3$と$PH_1$は重なる。）



四角形$D_1D_3G_3G_2$において$D_1G_2 = D_3G_3$、$D_1G_2 /\!/ D_3G_3$であるから、この四角形は平行四辺形であり、

$D_1D_3 /\!/ G_2G_3$　…①

同様にして

$D_2D_4 /\!/ G_2G_1$　…②

①②より四角形$OD_4G_1D_1$は平行四辺形である。このことと

$\angle G_1 = 90°$、$G_1D_4 = G_1D_1 = AM$

より、四角形$OD_4G_1D_1$は正方形である。他の３つの四角形についても同様のことが言えるので

四角形$OD_4G_1D_1$、四角形$OD_1G_2D_2$、四角形$OD_2G_3D_3$、四角形$OD_3G_4D_4$は正方形で、一辺が線分AMの長さに等しい　…③

③より、上述のように三角形D_1OE_1、D_2OE_2、D_3OE_3、D_4OE_4をつくることができて、

$D_1E_1 \perp D_2E_2$、$D_2E_2 \perp OE_2$、$D_1E_1 \perp OE_1$　…④

$OE_1 = OE_2 = MN$　…⑤

④⑤より、四角形$OE_1F_1E_2$は正方形である。他の３つの四角形についても同様のことが言えるの

で

四角形$OE_1F_1E_2$、四角形$OE_2F_2E_3$、四角形$OE_3F_3E_4$、四角形$OE_4F_4E_1$は正方形で、一辺が線分MNの長さに等しい　…⑥

③より、前述のように四角形$PH_1I_1H_2$、$PH_2I_2H_3$、$PH_3I_3H_4$、$PH_4I_4H_1$をつくることができる。仮定より$\angle F_4D_4G_1 = \angle F_2D_2G_3$であるから、

$$\angle F_4D_4G_1 + \angle G_2D_2F_2 = 180°$$

したがって

$$\angle I_1H_2P + \angle PH_2I_2 = 180°$$

が成り立つので、H_2は直線I_1I_2上にある。H_3、H_4、H_1についても同様である。仮定と③⑥より

$$I_1H_2 = D_4F_4 = D_4E_4 - E_4F_4 = AN - MN \quad \cdots⑦$$

$$H_2I_2 = D_2F_1 = D_2E_2 + E_2F_1 = AN + MN \quad \cdots⑧$$

⑦⑧より

$$I_1I_2 = I_1H_2 + H_2I_2 = (AN - MN) + (AN + MN) = 2AN = AC$$

である。四角形$I_1I_2I_3I_4$の他の辺についても同様で

$$I_1I_2 = I_2I_3 = I_3I_4 = I_4I_1 = AC$$

が成り立つ。内角はすべて$90°$だから

四角形$I_1I_2I_3I_4$は正方形で、一辺はACの長さに等しい　…⑨

仮定より、

（四角形$G_1G_2G_3G_4$）$= AB^2$　…⑩

（四角形$G_1G_2G_3G_4$）$=$（四角形$E_1E_2E_3E_4$）$+$（四角形$I_1I_2I_3I_4$）　…⑪

⑥より

（四角形$F_1F_2F_3F_4$）$= BC^2$　…⑫

⑨より

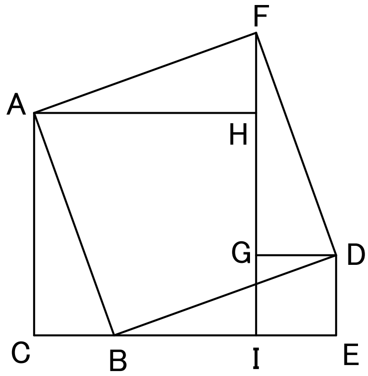
（四角形$I_1I_2I_3I_4$）$= AC^2$　…⑬

⑩⑪⑫⑬より

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

［証明 37］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ 、 $BC < CA$ であるとする。線分 BC の B の側の延長上に $BE = AC$ を満たす点 E をとる。三角形 ABC と合同な三角形 BDE をつくる（ただし、直線 CE に関して点 A と同じ側につくる)。線分 AC を一辺とする正方形 ACIH をつくる（ただし、直線 AC に関して点 B と同じ側につくるとする)。線分 DE を一辺とする正方形 DEIG をつくる（ただし、直線 DE に関して点 A と同じ側につくるとする)。三角形 ABC と合同な三角形 AFH をつくる（ただし、直線 AH に関して点 C と逆の側につくるとする)。



三角形 ABC と三角形 FDG において

$BC = DG$

$AC = HI = FI - FH = (FG + GI) - FH = FG$

$\angle C = \angle G = 90°$

であるから、

$\triangle ABC \equiv \triangle FDG$　…①

①と仮定より、

$\triangle ABC$、$\triangle BDE$、$\triangle FDG$、$\triangle AFH$ は合同である　…②

②と $\angle CAB + \angle ABC = 90°$ より、

$\angle ABD = \angle BDF = \angle DFA = \angle FAB = 90°$　…③

②より

$AB = BD = DF = FA$　…④

③④より

四角形 BDFA は正方形　…⑤

仮定と②⑤より、

（四角形 BDFA） $= AB^2$、（四角形 DEIG） $= BC^2$、（四角形 ACIH） $= CA^2$

…⑥

②より

（四角形 BDFA） ＝（四角形 DEIG） ＋（四角形 ACIH）　…⑦

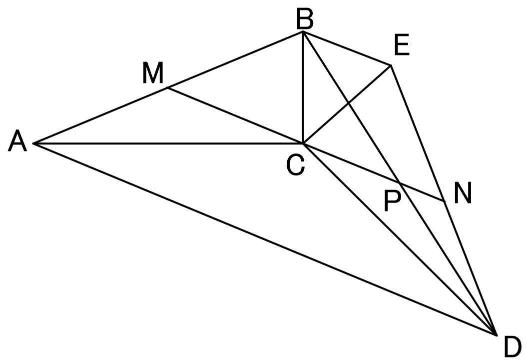
⑥⑦より

$AB^2 = BC^2 + CA^2$

［証明 38］

（証明としてはかなり大雑把です。適宜、補って読んでください。）

三角形ABCにおいて$\angle C = 90°$、$BC < CA$であるとする。辺ABの中点をMとする。点Dを$\triangle AMC \backsim \triangle ACD$を満たすようにとる（点Dは直線ACに関して点Mと逆側にとるものとする）。点Eを$\triangle BMC \backsim \triangle BCE$を満たすようにとる（点Eは直線BCに関してAと逆側にとるものとする）。線分DEの中点をNとし、線分BDの中点をPとする。



「直角三角形の外心は斜辺の中点である」から

$MA = MB = MC$ …①

$\triangle BMC \backsim \triangle BCE$より

$BE = \dfrac{BC^2}{BM}$ …②

$CB = CE$ …③

$\angle BMC = \angle BCE$ …④

$\angle CBE = \angle MBC$ …⑤

$\triangle AMC \backsim \triangle ACD$より

$AD = \dfrac{AC^2}{AM}$ …⑥

$CA = CD$ …⑦

$\angle AMC = \angle ACD$ …⑧

$\angle MAC = \angle CAD$ …⑨

④⑧と$\angle ACB = 90°$より

$\angle ECD = 90°$ …⑩

③⑦⑩より

$\triangle ABC \equiv \triangle DEC$ …⑪

⑤⑨と$\angle ACB = 90°$より

$\angle BAD + \angle ABE = 180°$

したがって

$AD /\!/ BE$ …⑫

中点連結定理より

$MP /\!/ AD$、$PN /\!/ BE$ …⑬

$$\mathrm{MP}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}、\mathrm{PN}=\frac{1}{2}\mathrm{BE} \quad \cdots ⑭$$

⑫⑬より点Pは直線MN上にあり

$$\mathrm{MP}+\mathrm{NP}=\mathrm{MN} \quad \cdots ⑮$$

①⑪より

$$\mathrm{MN}=2\mathrm{MC}=\mathrm{AB} \quad \cdots ⑯$$

②⑥⑭⑮⑯より

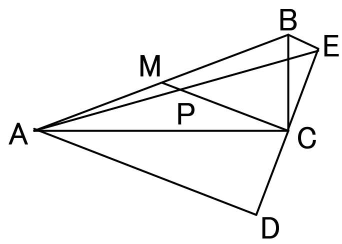
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AC}^2}{\mathrm{AM}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{BM}}=\mathrm{AB}$$

これと①より

$$\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2$$

［証明 39］

三角形ABCにおいて$\angle C=90^\circ$、$BC<CA$であるとする。辺ABの中点をMとする。△ACD∽△ABCを満たすように点Dをとる（点Dは直線CAに関して点Bと逆の側にとるものとする）。△CBE∽△ABCを満たすように点Eをとる（点Eは直線BCに関して点Aと逆の側にとるものとする）。線分AEの中点をPとする。



△ACD∽△ABCより

$$AD=\frac{AC^2}{AB} \quad \cdots①$$

$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB} \quad \cdots②$$

$$\angle CAD=\angle BAC \quad \cdots③$$

$$\angle ACD=\angle ABC \quad \cdots④$$

△CBE∽△ABCより

$$BE=\frac{BC^2}{AB} \quad \cdots⑤$$

$$CE=\frac{AC\cdot BC}{AB} \quad \cdots⑥$$

$$\angle CBE=\angle ABC \quad \cdots⑦$$

$$\angle BCE=\angle BAC \quad \cdots⑧$$

③⑦と$\angle ACB=90^\circ$より

$$\angle BAD+\angle ABE=180^\circ \quad \cdots⑨$$

⑨より

$$AD /\!/ BE \quad \cdots⑩$$

②⑥より

$$CD=CE \quad \cdots⑪$$

仮定と⑪より、中点連結定理を用いて

$$MP /\!/ BE、PC /\!/ AD \quad \cdots⑫$$

$$MP=\frac{1}{2}BE、PC=\frac{1}{2}AD \quad \cdots⑬$$

⑩⑫より点Pは直線MC上にあって、⑬より

$$MC=\frac{1}{2}BE+\frac{1}{2}AD \quad \cdots⑭$$

「直角三角形の外心は斜辺の中点である」から

$$\mathrm{MC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB} \quad \cdots⑮$$

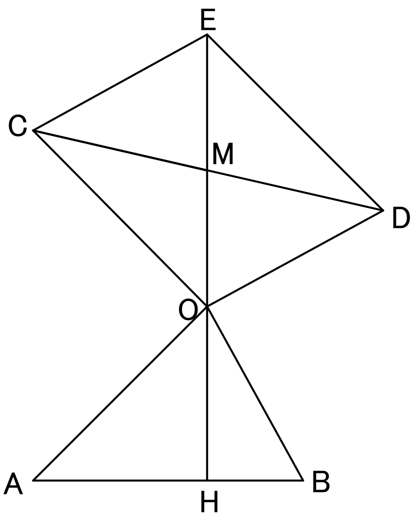
①⑤⑭⑮より

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{CA}^2}{\mathrm{AB}^2}$$

ゆえに

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$$

［補題 11］



上の図において、$OA = OC$、$\angle AOC = 90°$、$OB = OD$、$\angle BOD = 90°$、$OH \perp AB$であるとする。点Mは直線OHと直線CDとの交点である。このとき、$CM = MD$であり、△COHと△DOHの面積は等しい。

（証明）

$CM = MD$を示せば、△COHと△DOHの面積が等しいことは明らかである。以下で$CM = MD$を示す。

線分OHのOの側の延長上に$OE = AB$を満たす点Eをとる。$\angle AOC = 90°$、$\angle AHO = 90°$より

$\angle OAH + \angle AOH = 90°$、$\angle EOC + \angle AOH = 90°$

したがって

$\angle OAH = \angle EOC$　…①

△OABと△CODにおいて

仮定より、$OA = CO$、$AB = OE$

①より$\angle OAB = \angle COE$

であるから、

$\triangle OAB \equiv \triangle COE$　…②

同様にして

$\triangle OAB \equiv \triangle DEO$　…③

②③より

$\triangle COE \equiv \triangle DEO$　…④

④より

$OC = ED$、$OD = EC$　…⑤

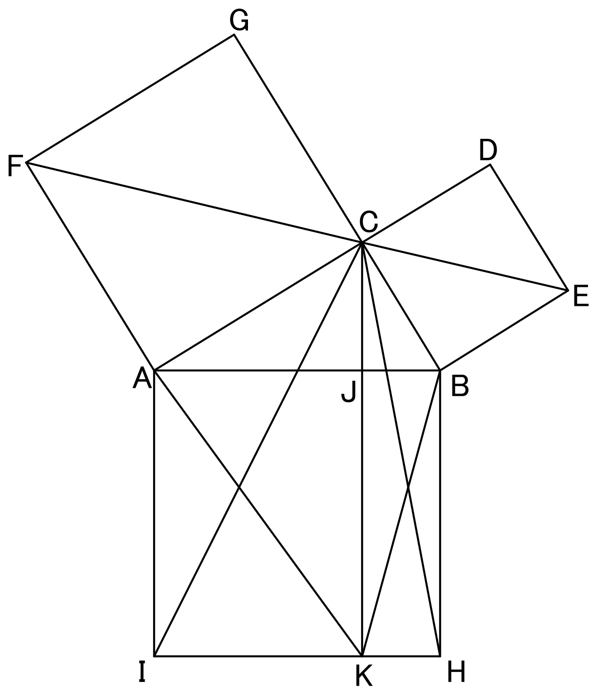
⑤より四角形OCEDは平行四辺形であり、

$CM = MD$

（証明おわり）

［証明 40］

三角形 ABC において $\angle C = 90°$ であるとする。辺 BC を一辺とする正方形 BCDE を三角形 ABC の外側につくる。辺 CA を一辺とする正方形 CAFG を三角形 ABC の外側につくる。辺 AB を一辺とする正方形 ABHI を三角形 ABC の外側につくる。点 C から直線 AB に垂線 CJ を引き、直線 CJ と直線 HI との交点を K とする。



$AB = AI$、$\angle BAI = 90°$、$AC = AF$、$\angle CAF = 90°$、$AC \perp BC$ であるから、［補題 11］より

$\triangle CAI = \triangle CAF$ …①

$CK // AI$ より

$\triangle CAI = \triangle KAI$ …②

①②より

$\triangle CAF = \triangle KAI$ …③

③より

（四角形 CAFG）＝（四角形 KIAJ） …④

同様にして

（四角形 BCDE）＝（四角形 HKJB） …⑤

④⑤より

（四角形 CAFG）＋（四角形 BCDE）＝（四角形 ABHI） …⑥

⑥より

$CA^2 + BC^2 = AB^2$