マイナス×マイナス＝プラス？？

中学１年生で習う正負の数ですが、マイナス×マイナスがなぜプラスになるのか、どうもしっくりこない方も多いようです。そもそも日本の中学校の教科書には、「負の数とは、０より小さい数です。」と書かれていますが、これもなんだか納得いかないような気がします。新しい数を習うときにはこの「なんだか納得いかない」という問題がたびたび発生します。

小学校から順をたどっていくと、数の範囲というのは以下のように拡張されていきます。

自然数

↓

自然数と０

↓

正の有理数（分数）

↓

有理数（負の有理数を含む）

↓

実数（おそらく平方根、あるいは、円周率πを習うあたりで自然に拡張されている）

↓

複素数

例えば０が登場したとき、「a×０＝０」の説明はおそらくこんなイメージです。

$$2\times 0=0+0=0$$

$$3\times 0=0+0+0=0$$

$$4\times 0=0+0+0+0=0$$

…

$$a\times 0=0$$

もちろんこれでは、ａが有理数のときには不十分です。まあ、それでも何とか説明を考えればある程度合理的な説明はできるのだと思いますが、論理的にはかなりあやういといっていいでしょう。普通、新しい数が出てきたとき、その数の説明は以下のように行われることが多いようです。

１．その数に適当と思われる意味付けをおこなって、すなわち、身の周りにある現象に当てはめてみて、説明を試みる。

２．そこまでに把握している数の性質を見ながら、その延長として考える。

たとえば、「a×０＝０」で考えると、上で述べた説明は２の方にあてはまります。１の方

で説明するならば、「時速ａkm で０時間走ったときに進む距離は０km である」みたいになります。

１の方の説明は数学の自然科学としての側面を表しています。実際に起こっている現象を用いて説明しているのです。しかし、「速さ」の性質のみをもって、数の性質を規定していいのか、という点に疑問があります。

２の方の説明は数学の論理的、抽象的な側面を表しています。さすがに上のような書き方は乱暴ですが、突き詰めれば、「（正の数について成り立つ）分配則が（０を含めても）成り立つのだとすれば、ａ×０＝０になる。」ということになります。

どちらにしても、（現代数学の立場をとれば）論理的に不十分ということになります。じゃあ（現代数学の代数学では）どうするかというと、これこれの性質を持つ（数の）集合があって、と始めることになります。先に性質を述べて定義してしまうわけですね。もちろん変に定義してしまうと、実際におこっている現象からかけ離れてしまってまったく役に立たなくなったり、自分で定めた性質どうしが矛盾してしまったりしてしまうので、注意が必要です。

ここでは代数学について詳しく説明するつもりは無いので、詳しく知りたい人は専門書などをご覧下さい。ここでは、いくつかの性質をもとに、０や負の数について考える方法の例を示すことにします。

［０の性質］

まず、０について考えます。０を特徴づける性質は

ａ＋０＝ａ　　　０＋ａ＝ａ　　　（ａは任意の数）

です。この性質と分配側から

ａ×０＝０

を示すことができます。ただし、差を次のように定義します。

ｘ＋ａ＝ｂを満たすｘは、もしあれば、それはただ一つに定まる。これをａとｂの差といい、ｂ－ａで表す

この定義に従うと、すべての数ｐに対して、

ｐ－ｐ＝0

が成り立つことになります。さらに、

ａ＋ｐ＝ａ　ならば　ｐ＝ａ－ａ＝０

が成り立つことになります。和と積に関しては、以下の性質があります。

ａ＋ｂ＝ｂ＋ａ、ａｂ＝ｂａ　（交換則）

（ａ＋ｂ）＋ｃ＝ａ＋（ｂ＋ｃ）、（ａｂ）ｃ＝ａ（ｂｃ）　（結合則）

ａ（ｂ＋ｃ）＝ａｂ＋ａｃ、（ａ＋ｂ）ｃ＝ａｃ＋ｂｃ　（分配則）

これらの性質から、

ａ×０＝０

を示すことができます。まず、

　　$x=a\times 0$

とします。

　　$0=0+0$

ですから

　　$x=a\times(0+0)$

です。分配則より、

　　$x=a\times 0+a\times 0$

となります。右辺の$a\times 0$はxですから、

　　$x=x+x$

すなわち、

　　$x+x=x$

となります。したがって、

　　$x=0$

です。

［負の数はどうしよう…］

負の数を教科書どおり「０より小さい数」とすると、「大きいということ」とか「大きさ」というものについて考えなければならない上に、それと加法・乗法との整合性を探るのが大変な作業になります。それで、次のような形に、（気づかれないように？）言い換えます。「負の数は正の数と反対の性質（向き？）をもつ数である」。

例えば、「マイナス３００円の利益」というのは「プラス３００円の損失」、「東にマイナス３m」というのは「西にプラス３m」という具合です。この言い方で「マイナス×マイナス＝プラス」を説明すると、「東向きに秒速マイナス１０m（西向きに秒速プラス１０mの意味と考える）の速度でマイナス３秒進む（プラス３秒戻るの意味）と東向きにプラス３０m進んだことになる。」というようになります。ただし、やはり「速度」の性質のみで負の数の性質を決めてしまってよいか、あるいは、そのように決めて他の「速度」の性質と矛盾しないかは疑問の残るところです。

「マイナス」（負の数？）を次のように定義してしまうと、論理的に整理しやすくなります。

　　$x+a=0$をみたすxを（aの加法に関する逆元といって）$-a$で表す

このようにしておくと、加法・乗法との関係が明確になります。

［マイナス×マイナス］

上のように「マイナス」を定義したところで、課題は以下の関係式を示すことです。

　　$(-a)(-b)=ab$

まず、関係式　$-(-a)=a$　を示します。$b=-a$ とします。

$$a+(-a)=0$$

ですから、

$$a+b=0$$

です。したがって、

$$a=-b=-(-a)$$

となります。

つぎに、関係式　$a(-b)=-(ab)$　を示します。$x=a(-b)$　とすると、

$$ab+x=ab+a(-b)$$

分配則より、　$ab+a(-b)=a(b+(-b))$　ですから、

$$ab+x=a(b+(-b))$$

$$ab+x=a\times 0$$

$$ab+x=0 \quad (\text{［０の性質］参照})$$

となります。したがって、

$$x=-(ab)$$

すなわち

$$a(-b)=-(ab)$$

となります。これで準備できました。

$$(-a)(-b)=ab$$

を示します。

$$\begin{aligned}&(-a)(-b)\\=&-((-a)b)\\=&-(b(-a))\\=&-(-(ba))\\=&-(-(ab))\\=&ab\end{aligned}$$

示すことができました。途中で交換則を用いましたが、交換則を用いない証明も可能です（省略。各自試みよ)。また、準備としていくつかの別の性質を示しながら書きましたが、準備なしで書くと次のようになります。

$$\begin{aligned}&(-a)(-b)\\=&(-a)(-b)+0\\=&(-a)(-b)+((-a)b+(-((-a)b)))\\=&((-a)(-b)+(-a)b)+(-((-a)b))\\=&(-a)((-b)+b)+(-((-a)b))\\=&(-a)\times 0+(-((-a)b))\\=&((-a)\times 0+0)+(-((-a)b))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((-a)\times 0+((-a)\times 0+(-((-a)\times 0))))+(-((-a)b))\\
&= (((-a)\times 0+(-a)\times 0)+(-((-a)\times 0)))+(-((-a)b))\\
&= ((-a)\times(0+0)+(-((-a)\times 0)))+(-((-a)b))\\
&= ((-a)\times 0+(-((-a)\times 0)))+(-((-a)b))\\
&= 0+(-((-a)b))\\
&= -((-a)b)\\
&= -((-a)b+0)\\
&= -((-a)b+(ab+(-ab)))\\
&= -(((-a)b+ab)+(-ab))\\
&= -((((-a)+a)b)+(-ab))\\
&= -(0\times b+(-ab))\\
&= -((0\times b+0)+(-ab))\\
&= -((0\times b+(0\times b+(-(0\times b))))+(-ab))\\
&= -(((0\times b+0\times b)+(-(0\times b)))+(-ab))\\
&= -(((0+0)\times b+(-(0\times b)))+(-ab))\\
&= -((0\times b+(-(0\times b)))+(-ab))\\
&= -(0+(-ab))\\
&= -(-ab)\\
&= -(-ab)+0\\
&= -(-ab)+((-ab)+ab)\\
&= (-(-ab)+(-ab))+ab\\
&= 0+ab\\
&= ab
\end{aligned}
$$

もし、$(-1)\times(-1)=1$を示したいだけであれば、少し簡単になります。

$$
\begin{aligned}
&\quad (-1)\times(-1)\\
&= (-1)\times(-1)+0\\
&= (-1)\times(-1)+((-1)\times 1+(-((-1)\times 1)))\\
&= ((-1)\times(-1)+(-1)\times 1)+(-((-1)\times 1))\\
&= (-1)\times((-1)+1)+(-((-1)\times 1))\\
&= (-1)\times 0+(-((-1)\times 1))\\
&= ((-1)\times 0+0)+(-((-1)\times 1))\\
&= ((-1)\times 0+((-1)\times 0+(-((-1)\times 0))))+(-((-1)\times 1))\\
&= (((-1)\times 0+(-1)\times 0)+(-((-1)\times 0)))+(-((-1)\times 1))\\
&= ((-1)\times(0+0)+(-((-1)\times 0)))+(-((-1)\times 1))\\
&= ((-1)\times 0+(-((-1)\times 0)))+(-((-1)\times 1))\\
&= 0+(-((-1)\times 1))
\end{aligned}
$$

＝－（(－１）×１）

＝－（－１）

＝－（－１）＋０

＝－（－１）＋（(－１）＋１）

＝（(－（－１)）＋（－１)）＋１

＝０＋１

＝１

（括弧の数とか間違えていたらごめんなさい。）

［おわり］

結局のところ、どの説明が正しいということもありません。数学の自然科学的な面で考えれば、「速さ」の話で十分だと思われますし、現代数学の立場（数学の公理系と命題論理・述語論理に根拠をおく立場）をとれば、上のような説明をすることになります。中学校・高校で数学を勉強中の方、専門ではないが数学に興味があるという（貴重な？）方は、直感的とらえることと、論理的にとらえることとの両方を念頭において、勉強を進めるとよいと思います。