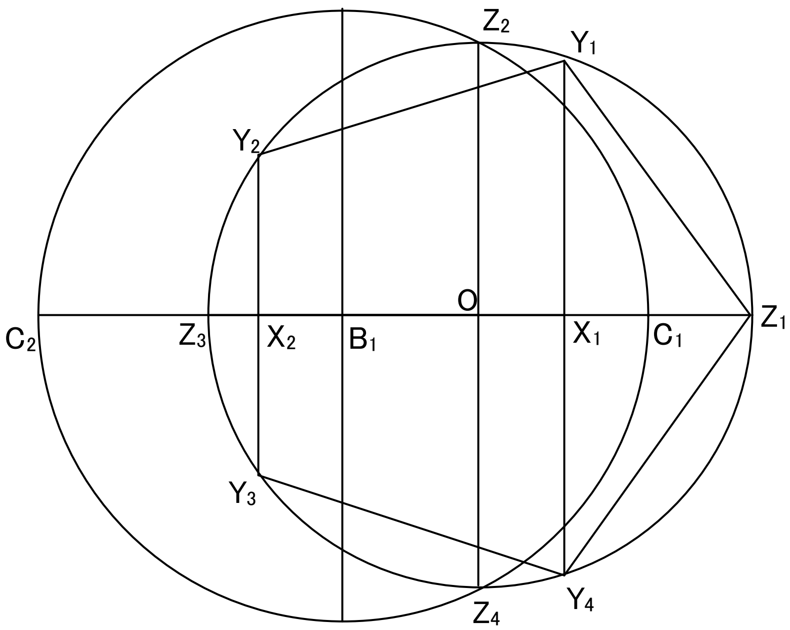
［正五角形の作図］



中心をO、半径を1とする円の直交する２本の直径Z_1Z_3、Z_2Z_4をとる。線分OZ_3の中点をB_1とする。B_1を中心とし点Z_2を通る円と直線OZ_1との交点をC_1、C_2（ただし、$Z_1C_1 < Z_1C_2$）とする。線分OC_1、OC_2の中点をそれぞれX_1、X_2とする。X_1を通り直線OZ_1に垂直な直線と円Oとの交点をY_1、Y_4（ただし、Y_1は直線OX_1に関してZ_2と同じ側にとる）とする。X_2を通り直線OZ_1に垂直な直線と円Oとの交点をY_2、Y_3（ただし、Y_2は直線OX_1に関してZ_2と同じ側にとる）とする。このとき、五角形$Z_1Y_1Y_2Y_3Y_4$は正五角形となる。

（証明）

仮定より、

$$OZ_1 = OZ_2 = OZ_3 = OZ_4 = 1 \quad \cdots(c.1)$$

$$OB_1 = \frac{1}{2}OZ_3 = \frac{1}{2} \quad \cdots(c.2)$$

C_1、O、B_1はこの順に同一直線上にあるから、

$$B_1C_1 = OB_1 + OC_1 \quad \cdots(c.3)$$

O、B_1、C_2はこの順に同一直線上にあるから、

$$B_1C_2 = OC_2 - OB_1 \quad \cdots(c.4)$$

仮定より

$$B_1C_1 = B_1C_2 \quad \cdots(c.5)$$

(c.3)(c.4)(c.5)より

$$OB_1 + OC_1 = OC_2 - OB_1 \quad \cdots(c.6)$$

(c.6)より

$$OC_2 - OC_1 = 2OB_1 \quad \cdots(c.7)$$

(c.2)(c.7)より

$$OC_2 - OC_1 = 1 \quad \cdots(c.8)$$

方べきの定理より

$$\mathrm{OC_1 \cdot OC_2 = OZ_2 \cdot OZ_4} \quad \cdots(\mathrm{c}.9)$$

(c.1)(c.9)より

$$\mathrm{OC_1 \cdot OC_2} = 1 \quad \cdots(\mathrm{c}.10)$$

仮定より

$$\mathrm{OC_1} = 2\mathrm{OX_1} \quad \cdots(\mathrm{c}.11)$$

$$\mathrm{OC_2} = 2\mathrm{OX_2} \quad \cdots(\mathrm{c}.12)$$

(c.8)(c.11)(c.12)より

$$2\mathrm{OX_2} - 2\mathrm{OX_1} = 1 \quad \cdots(\mathrm{c}.13)$$

(c.13)より

$$\mathrm{OX_2} - \mathrm{OX_1} = \frac{1}{2} \quad \cdots(\mathrm{c}.14)$$

(c.10)(c.11)(c.12)より

$$2\mathrm{OX_1} \cdot 2\mathrm{OX_2} = 1 \quad \cdots(\mathrm{c}.15)$$

(c.15)より

$$\mathrm{OX_1} \cdot \mathrm{OX_2} = \frac{1}{4} \quad \cdots(\mathrm{c}.16)$$

(c.14)より

$$\mathrm{OX_2} = \mathrm{OX_1} + \frac{1}{2} \quad \cdots(\mathrm{c}.17)$$

$$\mathrm{OX_1} = \mathrm{OX_2} - \frac{1}{2} \quad \cdots(\mathrm{c}.18)$$

(c.17)より

$$\mathrm{OX_2} \cdot \mathrm{OX_1} = \left(\mathrm{OX_1} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{OX_1} \quad \cdots(\mathrm{c}.19)$$

(c.19)より

$$2\mathrm{OX_1} \cdot \mathrm{OX_2} = 2\mathrm{OX_1}^2 + \mathrm{OX_1} \quad \cdots(\mathrm{c}.20)$$

(c.16)(c.20)より

$$\frac{1}{2} = 2\mathrm{OX_1}^2 + \mathrm{OX_1} \quad \cdots(\mathrm{c}.21)$$

(c.18)(c.21)より

$$\frac{1}{2} = 2\mathrm{OX_1}^2 + \mathrm{OX_2} - \frac{1}{2} \quad \cdots(\mathrm{c}.22)$$

(c.22)より

$$\mathrm{OX_2} = 1 - 2\mathrm{OX_1}^2 \quad \cdots(\mathrm{c}.23)$$

(c.23)と命題２より

$$\angle \mathrm{Z_1OY_2} = 2\angle \mathrm{Z_1OY_1} \quad \cdots(\mathrm{c}.24)$$

(c.18)より

$$\mathrm{OX_1} \cdot \mathrm{OX_2} = \left(\mathrm{OX_2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \mathrm{OX_2} \quad \cdots (\mathrm{c}.25)$$

(c.25)より

$$2\mathrm{OX_1} \cdot \mathrm{OX_2} = 2\mathrm{OX_2}^2 - \mathrm{OX_2} \quad \cdots (\mathrm{c}.26)$$

(c.16)(c.26)より

$$\frac{1}{2} = 2\mathrm{OX_2}^2 - \mathrm{OX_2} \quad \cdots (\mathrm{c}.27)$$

(c.17)(c.27)より

$$\frac{1}{2} = 2\mathrm{OX_2}^2 - \left(\mathrm{OX_1} + \frac{1}{2} \right) \quad \cdots (\mathrm{c}.28)$$

(c.28)より

$$\mathrm{OX_1} = 2\mathrm{OX_2}^2 - 1 \quad \cdots (\mathrm{c}.29)$$

(c.29)と命題４より

$$\text{優角} \angle \mathrm{Z_1OY_4} = 2\angle \mathrm{Z_1OY_2} \quad \cdots (\mathrm{c}.30)$$

(c.24)(c.30)より

$$\text{優角 } \mathrm{Z_1OY_4} = 4\angle \mathrm{Z_1OY_1} \quad \cdots (\mathrm{c}.31)$$

同じ角の優角と劣角だから

$$\text{優角 } \mathrm{Z_1OY_4} + \angle \mathrm{Z_1OY_4} = 360^\circ \quad \cdots (\mathrm{c}.32)$$

(c.31)(c.32)より

$$4\angle \mathrm{Z_1OY_1} + \angle \mathrm{Z_1OY_4} = 360^\circ \quad \cdots (\mathrm{c}.33)$$

$\mathrm{Y_1}$と$\mathrm{Y_4}$は直線$\mathrm{OZ_1}$に関して対称だから

$$\angle \mathrm{Z_1OY_1} = \angle \mathrm{Z_1OY_4} \quad \cdots (\mathrm{c}.34)$$

(c.33)(c.34)より

$$4\angle \mathrm{Z_1OY_1} + \angle \mathrm{Z_1OY_1} = 360^\circ \quad \cdots (\mathrm{c}.35)$$

(c.35)より

$$\angle \mathrm{Z_1OY_1} = 72^\circ \quad \cdots (\mathrm{c}.36)$$

(c.24)(c.30)(c.36)と対称性より

$$\angle \mathrm{Z_1OY_1} = \angle \mathrm{Y_1OY_2} = \angle \mathrm{Y_2OY_3} = \angle \mathrm{Y_3OY_4} = \angle \mathrm{Y_4OZ_1} = 72^\circ$$

ゆえに、五角形$\mathrm{Z_1Y_1Y_2Y_3Y_4}$は正五角形である。