（正 257 角形の作図法の構成）

☆ 正 17 角形の作図のアイデアとほぼ同じ方法で構成します。証明・説明の一部を省略しますので、正 17 角形の作図のアイデア・考察を先に読んでおいてください。

まず

$$\alpha=\cos\left(\frac{360}{257}\circ\right)+i\sin\left(\frac{360}{257}\circ\right)\quad\cdots(\text{e.1.1})$$

とします。整数 n について

$$a_n=\alpha^{27^n}\quad\cdots(\text{e.1.2})$$

とします。また、0 以上の整数 l と r に関して

$$s(l,r)=\sum_{k=0}^{2^{8-l}-1}a_{2^l k+r}\quad\cdots(\text{e.1.3})$$

とします。

$$s(0,0)=-1\quad\cdots(\text{e.1.4})$$

です。さらに整数 x について次の関数 $f(x)$ を考えます。定義域は x を 256 で割った余りが 128 でないような x に制限し、$f(x)$ の値は 0 以上 256 未満の整数とします。

$$\alpha^{1+27^x}=\alpha^{27^{f(x)}}\quad\cdots(\text{e.1.5})$$

このとき、$0\le r<t<2^l$ を満たす整数 r、t、l について

$$s(l,r+2^l)=s(l,r)\quad\cdots(\text{e.1.6})$$

$$s(l,r)s(l,t)=\sum_{m=0}^{2^{8-l}-1}s\left(l,f\left(t-r+2^l m\right)+r\right)\quad\cdots(\text{e.1.7})$$

$$\{s(l,r)\}^2=\sum_{m=0}^{2^{7-l}-1}s\left(l,f\left(2^l m\right)+r\right)+2^{8-l}+\sum_{m=2^{7-l}+1}^{2^{8-l}-1}s\left(l,f\left(2^l m\right)+r\right)\quad\cdots(\text{e.1.8})$$

が成り立ちます。証明は正 17 角形の場合とほぼ同様ですので、省略します。実際に作図法を構成するには、正 17 角形の場合と同じく表が必要です。正 17 角形の場合と比べると表がだいぶ大きくなり、この表を人の手で作成するのは非常に困難です。私はアクセスとエクセルを用いて作成しました。目的の数を探すのもたいへんです。

表２－１

10進法		2進法	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0	16	00000000	00010000
1	231	00000001	11100111
2	49	00000010	00110001
3	175	00000011	10101111
4	184	00000100	10111000
5	146	00000101	10010010
6	97	00000110	01100001
7	22	00000111	00010110
8	82	00001000	01010010
9	51	00001001	00110011
10	14	00001010	00001110
11	224	00001011	11100000
12	19	00001100	00010011
13	123	00001101	01111011
14	107	00001110	01101011
15	201	00001111	11001001
16	171	00010000	10101011
17	169	00010001	10101001
18	133	00010010	10000101
19	196	00010011	11000100
20	223	00010100	11011111
21	163	00010101	10100011
22	58	00010110	00111010
23	208	00010111	11010000
24	111	00011000	01101111
25	227	00011001	11100011
26	194	00011010	11000010
27	112	00011011	01110000
28	34	00011100	00100010
29	96	00011101	01100000
30	13	00011110	00001101
31	165	00011111	10100101

10進法		2進法	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
32	189	00100000	10111101
33	233	00100001	11101001
34	35	00100010	00100011
35	149	00100011	10010101
36	226	00100100	11100010
37	159	00100101	10011111
38	248	00100110	11111000
39	11	00100111	00001011
40	102	00101000	01100110
41	145	00101001	10010001
42	218	00101010	11011010
43	144	00101011	10010000
44	125	00101100	01111101
45	27	00101101	00011011
46	182	00101110	10110110
47	131	00101111	10000011
48	86	00110000	01010110
49	109	00110001	01101101
50	9	00110010	00001001
51	31	00110011	00011111
52	124	00110100	01111100
53	3	00110101	00000011
54	174	00110110	10101110
55	45	00110111	00101101
56	132	00111000	10000100
57	105	00111001	01101001
58	113	00111010	01110001
59	61	00111011	00111101
60	251	00111100	11111011
61	160	00111101	10100000
62	92	00111110	01011100
63	68	00111111	01000100

表２－２

10進法		2進法	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
64	40	01000000	00101000
65	44	01000001	00101100
66	154	01000010	10011010
67	254	01000011	11111110
68	147	01000100	10010011
69	12	01000101	00001100
70	220	01000110	11011100
71	59	01000111	00111011
72	95	01001000	01011111
73	143	01001001	10001111
74	103	01001010	01100111
75	108	01001011	01101100
76	39	01001100	00100111
77	214	01001101	11010110
78	75	01001110	01001011
79	209	01001111	11010001
80	151	01010000	10010111
81	207	01010001	11001111
82	90	01010010	01011010
83	10	01010011	00001010
84	21	01010100	00010101
85	117	01010101	01110101
86	205	01010110	11001101
87	78	01010111	01001110
88	24	01011000	00011000
89	37	01011001	00100101
90	170	01011010	10101010
91	52	01011011	00110100
92	198	01011100	11000110
93	255	01011101	11111111
94	250	01011110	11111010
95	148	01011111	10010100

10進法		2進法	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
96	139	01100000	10001011
97	20	01100001	00010100
98	164	01100010	10100100
99	153	01100011	10011001
100	89	01100100	01011001
101	18	01100101	00010010
102	127	01100110	01111111
103	129	01100111	10000001
104	64	01101000	01000000
105	161	01101001	10100001
106	241	01101010	11110001
107	63	01101011	00111111
108	77	01101100	01001101
109	249	01101101	11111001
110	83	01101110	01010011
111	98	01101111	01100010
112	240	01110000	11110000
113	234	01110001	11101010
114	252	01110010	11111100
115	17	01110011	00010001
116	57	01110100	00111001
117	28	01110101	00011100
118	73	01110110	01001001
119	41	01110111	00101001
120	166	01111000	10100110
121	237	01111001	11101101
122	222	01111010	11011110
123	188	01111011	10111100
124	242	01111100	11110010
125	50	01111101	00110010
126	195	01111110	11000011
127	221	01111111	11011101

表２－３

10進法		2進法	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
128	×	10000000	×
129	94	10000001	01011110
130	69	10000010	01000101
131	181	10000011	10110101
132	118	10000100	01110110
133	65	10000101	01000001
134	100	10000110	01100100
135	116	10000111	01110100
136	46	10001000	00101110
137	178	10001001	10110010
138	211	10001010	11010011
139	167	10001011	10100111
140	197	10001100	11000101
141	158	10001101	10011110
142	138	10001110	10001010
143	121	10001111	01111001
144	128	10010000	10000000
145	243	10010001	11110011
146	229	10010010	11100101
147	140	10010011	10001100
148	225	10010100	11100001
149	212	10010101	11010100
150	135	10010110	10000111
151	56	10010111	00111000
152	216	10011000	11011000
153	26	10011001	00011010
154	25	10011010	00011001
155	173	10011011	10101101
156	245	10011100	11110101
157	54	10011101	00110110
158	66	10011110	01000010
159	179	10011111	10110011
160	43	10100000	00101011
161	53	10100001	00110101
162	156	10100010	10011100
163	162	10100011	10100010
164	106	10100100	01101010
165	217	10100101	11011001
166	80	10100110	01010000
167	204	10100111	11001100
168	192	10101000	11000000
169	247	10101001	11110111
170	119	10101010	01110111
171	32	10101011	00100000
172	193	10101100	11000001
173	183	10101101	10110111
174	8	10101110	00001000
175	126	10101111	01111110
176	71	10110000	01000111
177	130	10110001	10000010
178	253	10110010	11111101
179	137	10110011	10001001
180	219	10110100	11011011
181	33	10110101	00100001
182	29	10110110	00011101
183	70	10110111	01000110
184	23	10111000	00010111
185	244	10111001	11110100
186	150	10111010	10010110
187	199	10111011	11000111
188	79	10111100	01001111
189	187	10111101	10111011
190	88	10111110	01011000
191	235	10111111	11101011

表２－４

10進法		2進法	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
192	232	11000000	11101000
193	5	11000001	00000101
194	30	11000010	00011110
195	99	11000011	01100011
196	191	11000100	10111111
197	2	11000101	00000010
198	55	11000110	00110111
199	48	11000111	00110000
200	76	11001000	01001100
201	246	11001001	11110110
202	120	11001010	01111000
203	206	11001011	11001110
204	72	11001100	01001000
205	236	11001101	11101100
206	215	11001110	11010111
207	60	11001111	00111100
208	38	11010000	00100110
209	84	11010001	01010100
210	136	11010010	10001000
211	238	11010011	11101110
212	81	11010100	01010001
213	101	11010101	01100101
214	176	11010110	10110000
215	104	11010111	01101000
216	62	11011000	00111110
217	228	11011001	11100100
218	210	11011010	11010010
219	122	11011011	01111010
220	190	11011100	10111110
221	114	11011101	01110010
222	1	11011110	00000001
223	200	11011111	11001000

10進法		2進法	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
224	157	11100000	10011101
225	134	11100001	10000110
226	239	11100010	11101111
227	67	11100011	01000011
228	6	11100100	00000110
229	85	11100101	01010101
230	168	11100110	10101000
231	202	11100111	11001010
232	87	11101000	01010111
233	185	11101001	10111001
234	36	11101010	00100100
235	142	11101011	10001110
236	203	11101100	11001011
237	177	11101101	10110001
238	115	11101110	01110011
239	152	11101111	10011000
240	155	11110000	10011011
241	186	11110001	10111010
242	93	11110010	01011101
243	110	11110011	01101110
244	7	11110100	00000111
245	213	11110101	11010101
246	4	11110110	00000100
247	42	11110111	00101010
248	74	11111000	01001010
249	15	11111001	00001111
250	91	11111010	01011011
251	141	11111011	10001101
252	180	11111100	10110100
253	172	11111101	10101100
254	47	11111110	00101111
255	230	11111111	11100110

まず$s(1,r)$について調べます。定義より

$$s(1,0)+s(1,1)=s(0,0) \quad \cdots\text{(e.1.9)}$$

(e.1.4)(e.1.9)より

$$s(1,0)+s(1,1)=-1 \quad \cdots\text{(e.1.10)}$$

(e.1.6)(e.1.7)と表２より

$$s(1,0)s(1,1)=64s(1,0)+64s(1,1) \quad \cdots\text{(e.1.11)}$$

(e.1.10)(e.1.11)より

$$s(1,0)s(1,1)=-64 \quad \cdots\text{(e.1.12)}$$

したがって、$s(1,0)$と$s(1,1)$について

(e.1.10)　$s(1,0)+s(1,1)=-1$

(e.1.12)　$s(1,0)s(1,1)=-64$

となります。数値計算により

$$s(1,0)>0>s(1,1) \quad \cdots\text{(e.1.13)}$$

です。

次は$s(2,r)$です。定義より

$$s(2,0)+s(2,2)=s(1,0) \quad \cdots\text{(e.1.14)}$$

$$s(2,1)+s(2,3)=s(1,1) \quad \cdots\text{(e.1.15)}$$

(e.1.6)(e.1.7)と表２より

$$s(2,0)s(2,2)=16s(2,0)+16s(2,1)+16s(2,2)+16s(2,3) \quad \cdots\text{(e.1.16)}$$

$$s(2,1)s(2,3)=16s(2,1)+16s(2,2)+16s(2,3)+16s(2,0) \quad \cdots\text{(e.1.17)}$$

(e.1.10)(e.1.14)(e.1.15)(e.1.16)より

$$s(2,0)s(2,2)=-16 \quad \cdots\text{(e.1.18)}$$

(e.1.10)(e.1.14)(e.1.15)(e.1.17)より

$$s(2,1)s(2,3)=-16 \quad \cdots\text{(e.1.19)}$$

したがって、$s(2,0)$と$s(2,2)$について

(e.1.14)　$s(2,0)+s(2,2)=s(1,0)$

(e.1.18)　$s(2,0)s(2,2)=-16$

となります。数値計算により

$$s(2,0)>0>s(2,2) \quad \cdots\text{(e.1.20)}$$

です。$s(2,1)$と$s(2,3)$については

(e.1.15)　$s(2,1)+s(2,3)=s(1,1)$

(e.1.19)　$s(2,1)s(2,3)=-16$

となります。数値計算により

$$s(2,1)<0<s(2,3) \quad \cdots\text{(e.1.21)}$$

です。

次は$s(3,r)$です。定義により

$$s(3,0)+s(3,4)=s(2,0) \quad \cdots\text{(e.1.22)}$$

$$s(3,1)+s(3,5)=s(2,1) \quad \cdots\text{(e.1.23)}$$

$$s(3,2)+s(3,6)=s(2,2) \quad \cdots\text{(e.1.24)}$$
$$s(3,3)+s(3,7)=s(2,3) \quad \cdots\text{(e.1.25)}$$

(e.1.6)(e.1.7)と表２より

$$s(3,0)s(3,4)=2s(3,0)+5s(3,1)+4s(3,2)+5s(3,3)+2s(3,4)+5s(3,5)+4s(3,6)+5s(3,7) \quad \cdots\text{(e.1.26)}$$
$$s(3,1)s(3,5)=2s(3,1)+5s(3,2)+4s(3,3)+5s(3,4)+2s(3,5)+5s(3,6)+4s(3,7)+5s(3,0) \quad \cdots\text{(e.1.27)}$$
$$s(3,2)s(3,6)=2s(3,2)+5s(3,3)+4s(3,4)+5s(3,5)+2s(3,6)+5s(3,7)+4s(3,0)+5s(3,1) \quad \cdots\text{(e.1.28)}$$
$$s(3,3)s(3,7)=2s(3,3)+5s(3,4)+4s(3,5)+5s(3,6)+2s(3,7)+5s(3,0)+4s(3,1)+5s(3,2) \quad \cdots\text{(e.1.29)}$$

(e.1.22)(e.1.23)(e.1.24)(e.1.25)(e.1.26)より

$$s(3,0)s(3,4)=2s(2,0)+5s(2,1)+4(2,2)+5s(2,3) \quad \cdots\text{(e.1.30)}$$

(e.1.22)(e.1.23)(e.1.24)(e.1.25)(e.1.27)より

$$s(3,1)s(3,5)=5s(2,0)+2s(2,1)+5s(2,2)+4s(2,3) \quad \cdots\text{(e.1.31)}$$

(e.1.22)(e.1.23)(e.1.24)(e.1.25)(e.1.28)より

$$s(3,2)s(3,6)=4s(2,0)+5s(2,1)+2s(2,2)+5s(2,3) \quad \cdots\text{(e.1.32)}$$

(e.1.22)(e.1.23)(e.1.24)(e.1.25)(e.1.29)より

$$s(3,3)s(3,7)=5s(2,0)+4s(2,1)+5s(2,2)+2s(2,3) \quad \cdots\text{(e.1.33)}$$

したがって、$s(3,0)$と$s(3,4)$について

(e.1.22) $s(3,0)+s(3,4)=s(2,0)$

(e.1.30) $s(3,0)s(3,4)=2s(2,0)+5s(2,1)+4(2,2)+5s(2,3)$

となります。数値計算により

$$s(3,0)>0>s(3,4) \quad \cdots\text{(e.1.34)}$$

です。$s(3,1)$と$s(3,5)$について

(e.1.23) $s(3,1)+s(3,5)=s(2,1)$

(e.1.31) $s(3,1)s(3,5)=5s(2,0)+2s(2,1)+5s(2,2)+4s(2,3)$

となります。数値計算により

$$s(3,1)<s(3,5)<0 \quad \cdots\text{(e.1.35)}$$

です。$s(3,2)$と$s(3,6)$については

(e.1.24) $s(3,2)+s(3,6)=s(2,2)$

(e.1.32) $s(3,2)s(3,6)=4s(2,0)+5s(2,1)+2s(2,2)+5s(2,3)$

となります。数値計算により

$$s(3,2)<0<s(3,6) \quad \cdots\text{(e.1.36)}$$

です。$s(3,3)$と$s(3,7)$については

(e.1.25) $s(3,3)+s(3,7)=s(2,3)$

(e.1.33) $s(3,3)s(3,7)=5s(2,0)+4s(2,1)+5s(2,2)+2s(2,3)$

となります。数値計算により

$$0<s(3,3)<s(3,7) \quad \cdots\text{(e.1.37)}$$

です。

次は$s(4,r)$です。定義より

$$s(4,0)+s(4,8)=s(3,0) \quad \cdots\text{(e.1.38)}$$

$$s(4,1)+s(4,9)=s(3,1) \quad \cdots\text{(e.1.39)}$$

$$s(4,2)+s(4,10)=s(3,2) \quad \cdots\text{(e.1.40)}$$

$$s(4,3)+s(4,11)=s(3,3) \quad \cdots\text{(e.1.41)}$$

$$s(4,4)+s(4,12)=s(3,4) \quad \cdots\text{(e.1.42)}$$

$$s(4,5)+s(4,13)=s(3,5) \quad \cdots\text{(e.1.43)}$$

$$s(4,6)+s(4,14)=s(3,6) \quad \cdots\text{(e.1.44)}$$

$$s(4,7)+s(4,15)=s(3,7) \quad \cdots\text{(e.1.45)}$$

(e.1.6)(e.1.7)と表２より

$$s(4,0)s(4,8)=2s(4,0)+s(4,2)+s(4,4)+2s(4,6)+2s(4,7)+2s(4,8)+s(4,10)+s(4,12)+2s(4,14)+2s(4,15) \quad \cdots\text{(e.1.46)}$$

$$s(4,1)s(4,9)=2s(4,1)+s(4,3)+s(4,5)+2s(4,7)+2s(4,8)+2s(4,9)+s(4,11)+s(4,13)+2s(4,15)+2s(4,0) \quad \cdots\text{(e.1.47)}$$

$$s(4,2)s(4,10)=2s(4,2)+s(4,4)+s(4,6)+2s(4,8)+2s(4,9)+2s(4,10)+s(4,12)+s(4,14)+2s(4,0)+2s(4,1) \quad \cdots\text{(e.1.48)}$$

$$s(4,3)s(4,11)=2s(4,3)+s(4,5)+s(4,7)+2s(4,9)+2s(4,10)+2s(4,11)+s(4,13)+s(4,15)+2s(4,1)+2s(4,2) \quad \cdots\text{(e.1.49)}$$

$$s(4,4)s(4,12)=2s(4,4)+s(4,6)+s(4,8)+2s(4,10)+2s(4,11)+2s(4,12)+s(4,14)+s(4,0)+2s(4,2)+2s(4,3) \quad \cdots\text{(e.1.50)}$$

$$s(4,5)s(4,13)=2s(4,5)+s(4,7)+s(4,9)+2s(4,11)+2s(4,12)+2s(4,13)+s(4,15)+s(4,1)+2s(4,3)+2s(4,4) \quad \cdots\text{(e.1.51)}$$

$$s(4,6)s(4,14)=2s(4,6)+s(4,8)+s(4,10)+2s(4,12)+2s(4,13)+2s(4,14)+s(4,0)+s(4,2)+2s(4,4)+2s(4,5) \quad \cdots\text{(e.1.52)}$$

$$s(4,7)s(4,15)=2s(4,7)+s(4,9)+s(4,11)+2s(4,13)+2s(4,14)+2s(4,15)+s(4,1)+s(4,3)+2s(4,5)+2s(4,6) \quad \cdots\text{(e.1.53)}$$

(e.1.38)(e.1.40)(e.1.42)(e.1.44)(e.1.45)(e.1.46)より

$$s(4,0)s(4,8)=2s(3,0)+s(3,2)+s(3,4)+2s(3,6)+2s(3,7) \quad \cdots\text{(e.1.54)}$$

(e.1.38)(e.1.39)(e.1.41)(e.1.43)(e.1.45)(e.1.47)より

$$s(4,1)s(4,9)=2s(3,0)+2s(3,1)+s(3,3)+s(3,5)+2s(3,7) \quad \cdots\text{(e.1.55)}$$

(e.1.38)(e.1.39)(e.1.40)(e.1.42)(e.1.44)(e.1.48)より

$$s(4,2)s(4,10)=2s(3,0)+2s(3,1)+2s(3,2)+s(3,4)+s(3,6) \quad \cdots\text{(e.1.56)}$$

(e.1.39)(e.1.40)(e.1.41)(e.1.43)(e.1.45)(e.1.49)より

$$s(4,3)s(4,11)=2s(3,1)+2s(3,2)+2s(3,3)+s(3,5)+s(3,7) \quad \cdots\text{(e.1.57)}$$

(e.1.38)(e.1.40)(e.1.41)(e.1.42)(e.1.44)(e.1.50)より

$$s(4,4)s(4,12)=s(3,0)+2s(3,2)+2s(3,3)+2s(3,4)+s(3,6) \quad \cdots\text{(e.1.58)}$$

(e.1.39)(e.1.41)(e.1.42)(e.1.43)(e.1.45)(e.1.51)より

$$s(4,5)s(4,13)=s(3,1)+2s(3,3)+2s(3,4)+2s(3,5)+s(3,7) \quad \cdots\text{(e.1.59)}$$

(e.1.38)(e.1.40)(e.1.42)(e.1.43)(e.1.44)(e.1.52)より

$$s(4,6)s(4,14)=s(3,0)+s(3,2)+2s(3,4)+2s(3,5)+2s(3,6) \quad \cdots\text{(e.1.60)}$$

(e.1.39)(e.1.41)(e.1.43)(e.1.44)(e.1.45)(e.1.53)より

$$s(4,7)s(4,15)=s(3,1)+s(3,3)+2s(3,5)+2s(3,6)+2s(3,7) \quad \cdots\text{(e.1.61)}$$

したがって、$s(4,0)$と$s(4,8)$について

(e.1.38)　$s(4,0)+s(4,8)=s(3,0)$

(e.1.54)　$s(4,0)s(4,8)=2s(3,0)+s(3,2)+s(3,4)+2s(3,6)+2s(3,7)$

となります。数値計算により

$$s(4,0)>s(4,8)>0 \quad \cdots\text{(e.1.62)}$$

です。$s(4,1)$と$s(4,9)$については

(e.1.39)　$s(4,1)+s(4,9)=s(3,1)$

(e.1.55)　$s(4,1)s(4,9)=2s(3,0)+2s(3,1)+s(3,3)+s(3,5)+2s(3,7)$

となります。数値計算により

$$0>s(4,1)>s(4,9) \quad \cdots\text{(e.1.63)}$$

です。$s(4,2)$と$s(4,10)$については

(e.1.40)　$s(4,2)+s(4,10)=s(3,2)$

(e.1.56)　$s(4,2)s(4,10)=2s(3,0)+2s(3,1)+2s(3,2)+s(3,4)+s(3,6)$

となります。数値計算により

$$s(4,2)<s(4,10)<0 \quad \cdots\text{(e.1.64)}$$

です。$s(4,3)$と$s(4,11)$については

(e.1.41)　$s(4,3)+s(4,11)=s(3,3)$

(e.1.57)　$s(4,3)s(4,11)=2s(3,1)+2s(3,2)+2s(3,3)+s(3,5)+s(3,7)$

となります。数値計算により

$$s(4,3)<0<s(4,11) \quad \cdots\text{(e.1.65)}$$

です。$s(4,4)$と$s(4,8)$については

(e.1.42)　$s(4,4)+s(4,12)=s(3,4)$

(e.1.58)　$s(4,4)s(4,12)=s(3,0)+2s(3,2)+2s(3,3)+2s(3,4)+s(3,6)$

となります。数値計算により

$$s(4,4)<s(4,12)<0 \quad \cdots\text{(e.1.66)}$$

です。$s(4,5)$と$s(4,13)$については

(e.1.43)　$s(4,5)+s(4,13)=s(3,5)$

(e.1.59)　$s(4,5)s(4,13)=s(3,1)+2s(3,3)+2s(3,4)+2s(3,5)+s(3,7)$

となります。数値計算により

$$s(4,5)<0<s(4,13) \quad \cdots\text{(e.1.67)}$$

です。$s(4,6)$と$s(4,14)$については

(e.1.44)　$s(4,6)+s(4,14)=s(3,6)$

(e.1.60)　$s(4,6)s(4,14)=s(3,0)+s(3,2)+2s(3,4)+2s(3,5)+2s(3,6)$

となります。数値計算により

$$s(4,6)>0>s(4,14) \quad \cdots\text{(e.1.68)}$$

です。$s(4,7)$と$s(4,15)$については

(e.1.45)　$s(4,7)+s(4,15)=s(3,7)$

(e.1.61)　$s(4,7)s(4,15)=s(3,1)+s(3,3)+2s(3,5)+2s(3,6)+2s(3,7)$

となります。数値計算によって

$s(4,7)>0>s(4,15)$　…(e.1.69)

です。

次は$s(5,r)$です。ここからは、必要なものだけ求めることにします。定義より

$s(5,0)+s(5,16)=s(4,0)$　…(e.1.70)

$s(5,1)+s(5,17)=s(4,1)$　…(e.1.71)

$s(5,2)+s(5,18)=s(4,2)$　…(e.1.72)

$s(5,3)+s(5,19)=s(4,3)$　…(e.1.73)

$s(5,4)+s(5,20)=s(4,4)$　…(e.1.74)

$s(5,5)+s(5,21)=s(4,5)$　…(e.1.75)

$s(5,6)+s(5,22)=s(4,6)$　…(e.1.76)

$s(5,7)+s(5,23)=s(4,7)$　…(e.1.77)

$s(5,8)+s(5,24)=s(4,8)$　…(e.1.78)

$s(5,9)+s(5,25)=s(4,9)$　…(e.1.79)

$s(5,10)+s(5,26)=s(4,10)$　…(e.1.80)

$s(5,11)+s(5,27)=s(4,11)$　…(e.1.81)

$s(5,12)+s(5,28)=s(4,12)$　…(e.1.82)

$s(5,13)+s(5,29)=s(5,13)$　…(e.1.83)

$s(5,14)+s(5,30)=s(4,14)$　…(e.1.84)

$s(5,15)+s(5,31)=s(5,15)$　…(e.1.85)

(e.1.6)(e.1.7)と表２より

$s(5,0)s(5,16)=s(5,0)+s(5,6)+s(5,7)+s(5,11)+s(5,16)+s(5,22)+s(5,23)+s(5,27)$
…(e.1.86)

$s(5,3)s(5,19)=s(5,3)+s(5,9)+s(5,10)+s(5,14)+s(5,19)+s(5,25)+s(5,26)+s(5,30)$
…(e.1.87)

$s(5,5)s(5,21)=s(5,5)+s(5,11)+s(5,12)+s(5,16)+s(5,21)+s(5,27)+s(5,28)+s(5,0)$
…(e.1.88)

$s(5,8)s(5,24)=s(5,8)+s(5,14)+s(5,15)+s(5,19)+s(5,24)+s(5,30)+s(5,31)+s(5,3)$
…(e.1.89)

$s(5,11)s(5,27)=s(5,11)+s(5,17)+s(5,18)+s(5,22)+s(5,27)+s(5,1)+s(5,2)+s(5,6)$
…(e.1.90)

$s(5,13)s(5,29)=s(5,13)+s(5,19)+s(5,20)+s(5,24)+s(5,29)+s(5,3)+s(5,4)+s(5,8)$
…(e.1.91)

(e.1.70)(e.1.76)(e.1.77)(e.1.81)(e.1.86)より

$s(5,0)s(5,16)=s(4,0)+s(4,6)+s(4,7)+s(4,11)$　…(e.1.92)

(e.1.73)(e.1.79)(e.1.80)(e.1.84)(e.1.87)より

$$s(5,3)s(5,19)=s(4,3)+s(5,9)+s(5,10)+s(5,14) \quad \cdots\text{(e.1.93)}$$

(e.1.70)(e.1.75)(e.1.81)(e.1.82)(e.1.88)より

$$s(5,5)s(5,21)=s(4,0)+s(4,5)+s(4,11)+s(4,12) \quad \cdots\text{(e.1.94)}$$

(e.1.73)(e.1.78)(e.1.94)(e.1.95)(e.1.89)より

$$s(5,8)s(5,24)=s(4,3)+s(4,8)+s(4,14)+s(4,15) \quad \cdots\text{(e.1.95)}$$

(e.1.71)(e.1.72)(e.1.76)(e.1.81)(e.1.90)より

$$s(5,11)s(5,27)=s(5,1)+s(5,2)+s(5,6)+s(5,11) \quad \cdots\text{(e.1.96)}$$

(e.1.73)(e.1.74)(e.1.78)(e.1.83)(e.1.91)より

$$s(5,13)s(5,29)=s(4,3)+s(4,4)+s(4,8)+s(4,13) \quad \cdots\text{(e.1.97)}$$

したがって、$s(5,0)$と$s(5,16)$について

(e.1.70)　$s(5,0)+s(5,16)=s(4,0)$

(e.1.92)　$s(5,0)s(5,16)=s(4,0)+s(4,6)+s(4,7)+s(4,11)$

となります。数値計算により

$$s(5,0)>s(5,16)>0 \quad \cdots\text{(e.1.98)}$$

です。$s(5,3)$と$s(5,19)$については

(e.1.73)　$s(5,3)+s(5,19)=s(4,3)$

(e.1.93)　$s(5,3)s(5,19)=s(4,3)+s(5,9)+s(5,10)+s(5,14)$

となります。数値計算により

$$s(5,3)<0<s(5,19) \quad \cdots\text{(e.1.99)}$$

です。$s(5,5)$と$s(5,21)$については

(e.1.75)　$s(5,5)+s(5,21)=s(4,5)$

(e.1.94)　$s(5,5)s(5,21)=s(4,0)+s(4,5)+s(4,11)+s(4,12)$

となります。数値計算により

$$0>s(5,5)>s(5,21) \quad \cdots\text{(e.1.100)}$$

です。$s(5,8)$と$s(5,24)$については

(e.1.78)　$s(5,8)+s(5,24)=s(4,8)$

(e.1.95)　$s(5,8)s(5,24)=s(4,3)+s(4,8)+s(4,14)+s(4,15)$

となります。数値計算により

$$s(5,8)>0>s(5,24) \quad \cdots\text{(e.1.101)}$$

です。$s(5,11)$と$s(5,27)$については

(e.1.81)　$s(5,11)+s(5,27)=s(4,11)$

(e.1.96)　$s(5,11)s(5,27)=s(5,1)+s(5,2)+s(5,6)+s(5,11)$

となります。数値計算により

$$s(5,11)>s(5,27)>0 \quad \cdots\text{(e.1.102)}$$

です。$s(5,13)$と$s(5,29)$については

(e.1.83)　$s(5,13)+s(5,29)=s(5,13)$

(e.1.97)　$s(5,13)s(5,29)=s(4,3)+s(4,4)+s(4,8)+s(4,13)$

となります。数値計算により

$$s(5,13)<0<s(5,29) \quad \cdots\text{(e.1.103)}$$

です。

次は$s(6,r)$です。定義より

$$s(6,0)+s(6,32)=s(5,0) \quad \cdots\text{(e.1.104)}$$

$$s(6,5)+s(6,37)=s(5,5) \quad \cdots\text{(e.1.105)}$$

$$s(6,8)+s(6,40)=s(5,8) \quad \cdots\text{(e.1.106)}$$

$$s(6,11)+s(6,43)=s(5,11) \quad \cdots\text{(e.1.107)}$$

$$s(6,19)+s(6,51)=s(5,19) \quad \cdots\text{(e.1.108)}$$

$$s(6,29)+s(6,61)=s(5,29) \quad \cdots\text{(e.1.109)}$$

(e.1.6)(e.1.7)と表２より

$$s(6,0)s(6,32)=s(6,11)+s(6,29)+s(6,43)+s(6,61) \quad \cdots\text{(e.1.110)}$$

$$s(6,8)s(6,40)=s(6,19)+s(6,37)+s(6,51)+s(6,5) \quad \cdots\text{(e.1.111)}$$

(e.1.107)(e.1.109)(e.1.110)より

$$s(6,0)s(6,32)=s(5,11)+s(5,29) \quad \cdots\text{(e.1.112)}$$

(e.1.105)(e.1.108)(e.1.111)より

$$s(6,8)s(6,40)=s(5,5)+s(5,19) \quad \cdots\text{(e.1.113)}$$

したがって、$s(6,0)$と$s(6,32)$について

(e.1.104)　$s(6,0)+s(6,32)=s(5,0)$

(e.1.112)　$s(6,0)s(6,32)=s(5,11)+s(5,29)$

となります。数値計算により

$$s(6,0)>s(6,32)>0 \quad \cdots\text{(e.1.114)}$$

です。$s(6,8)$と$s(6,40)$については

(e.1.106)　$s(6,8)+s(6,40)=s(5,8)$

(e.1.113)　$s(6,8)s(6,40)=s(5,5)+s(5,19)$

となります。数値計算により

$$0<s(6,8)<s(6,40) \quad \cdots\text{(e.1.115)}$$

です。

最後に$s(7,r)$です。定義より

$$s(7,0)+s(7,64)=s(6,0) \quad \cdots\text{(e.1.116)}$$

$$s(7,40)+s(7,104)=s(6,40) \quad \cdots\text{(e.1.117)}$$

(e.1.6)(e.1.7)と表２より

$$s(7,0)s(7,64)=s(7,40)+s(7,104) \quad \cdots\text{(e.1.118)}$$

(e.1.117)(e.1.118)より

$$s(7,0)s(7,64)=s(6,40) \quad \cdots\text{(e.1.119)}$$

したがって、$s(7,0)$と$s(7,64)$について

(e.1.116)　$s(7,0)+s(7,64)=s(6,0)$

(e.1.119)　$s(7,0)s(7,64)=s(6,40)$

となります。数値計算により

$$s(7,0)>s(7,64)>0 \quad \cdots\text{(e.1.120)}$$

です。

$$s(7,0)=\alpha^{27^0}+\alpha^{27^{128}}=\alpha^1+\alpha^{256}=\alpha+\overline{\alpha}=2\,\mathrm{Re}\,\alpha=2\cos\left(\frac{360}{257}\circ\right)$$

が成り立ちますので（$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数）、

$$\cos\left(\frac{360}{257}\circ\right)=\frac{1}{2}s(7,0)$$

です。これで、二次方程式を何回か解くことによって $\cos\left(\frac{360}{257}\circ\right)$ の値が得られることがわかりました。以下、得られた方程式と符号をよく見ながら作図法を構成してみます。

まず、$s(1,0)$、$s(1,1)$ を作図します。半径１の円を描いて、直径を作図します。直径は横に引いたことにして、右端を Z_1、左端を Z_3 とします。 $\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_3$ と直交する直径を作図して、上端を Z_2 、下端を Z_4 とします。まず、64 を作図します。半直線 OZ_4 上に $\mathrm{OC}_{1,0}=64$ を満たすように点 $\mathrm{C}_{1,0}$ をとります。（添え字は点を区別するためのものです。アルファベットだけでは 26 個の点しか表記することができません。）線分 OZ_3 の垂直二等分線上に中心をもち、２点 Z_2 、$\mathrm{C}_{1,0}$ を通る円を描きます。この円と直線 OZ_1 との交点を $\mathrm{E}_{1,0}$ 、$\mathrm{E}_{1,1}$ とします。このように作図すると $\mathrm{OE}_{1,0}=s(1,0)$、$\mathrm{OE}_{1,1}=-s(1,1)$ が成り立ちます。

符号については、次のように考えると作図が簡単になります。直線 $\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_3$ を O を原点とする数直線だと思ってください。 Z_1 側が正です。同じように、直線 $\mathrm{Z}_2\mathrm{Z}_4$ を O を原点とする数直線だと思ってください。Z_2 側が正です。実数 a 、b について、数直線 $\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_3$ 上に $\mathrm{A}(a)$ をとり、数直線 $\mathrm{Z}_2\mathrm{Z}_4$ 上に点 $\mathrm{B}(b)$ をとったとしましょう。線分 OA の垂直二等分線上に中心をもち、２点 Z_2 、B を通る円を作図して、この円と数直線 $\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_3$ との２交点（交点があればですが…）を作図すると、この２点を表す数は、和が a で積が b である２数を表しています。点が O より右側にあれば、正の数を表すことになりますし、左側にあれば負の数を表すことになりまし、右側にある点がより大きな数を表すことになります。$\mathrm{E}_{1,0}$、$\mathrm{E}_{1,1}$ では、

$s(1,0)>0>s(1,1)$ …(e.1.13)

だったので、右側が $s(1,0)$ 、左側が $s(1,1)$ を表します。対応がわかりやすいように点に名前をつけました。

$s(2,0)$、$s(2,2)$ についても同様です。

$s(2,0)+s(2,2)=s(1,0)$ …(e.1.14)

$s(2,0)s(2,2)=-16$ …(e.1.18)

だったので、直線 $\mathrm{Z}_2\mathrm{Z}_4$ 上の O より下側に $\mathrm{OC}_{2,0}=16$ を満たす点をとります。負なので下側にとることに注意してください。あとは同様に円を作図して直線 $\mathrm{Z}_1\mathrm{Z}_3$ との交点を求めれば、$s(2,0)$、$s(2,2)$ が作図できたことになります。 $s(2,1)$ 、$s(2,3)$ についても同様です。 $s(3,0)$、$s(3,4)$ も同様ですが、少し複雑です。

$s(3,0)+s(3,4)=s(2,0)$ …(e.1.22)

$$s(3,0)s(3,4) = 2s(2,0) + 5s(2,1) + 4(2,2) + 5s(2,3) \quad \cdots\text{(e.1.30)}$$

ですから、(e.1.30)の右辺を数直線Z_2Z_4上に作図することになります。右辺に登場する各項はすでに作図されています。まず、$s(2,0)$の長さをとってコンパスを2回使うことで$2s(2,0)$の値を作図します。$s(2,0)$の値は正なので、Oより上側に点がきます。その点から、$5s(2,1)$分移動した点を作図するわけですが、$s(2,1)$は負なので下側に移動してください。コンパスを5回使って、下向きに移動します。同様の作業を符号に注意しながら（図の上でOより右側にある点は正なので、その分をZ_2Z_4上で移動しするときは、上側へ移動します。左側にある点は負なので、その分をZ_2Z_4上で移動しするときは、下側へ移動します。）、移動を続けると(e.1.30)の右辺が作図できます。あとは、$s(2,r)$までと同様に円を描いて直線Z_1Z_3との交点を求めることで、$s(3,0)$、$s(3,4)$の値が作図できます。他の$s(3,r)$についても同様です。

$s(4,r)$、$s(5,r)$、$s(6,r)$、$s(7,r)$も同様に作図を続けることによって、作図することが可能です。ただし、全部作図しようとすると、$s(l,r)$のlが増えるほど作図しなければならない点が増えていきます。$s(7,0)$だけを求めるたいのであれば、すべてを作図する必要はありませんから、$s(7,0)$を出すのにどの点が必要かを逆にチェックしながら、必要なものだけを作図します。$s(7,0)$からZ_1を頂点とする正257角形の頂点のうちZ_1と隣り合う2個が作図できます。

実際にこの作図を実行すると、円を約280個、直線を約50個、点を約330個も作図することになります。この作図をしても、正257角形の頂点のうち、隣り合う3個が得られただけなので、このあと254個の点を作図しなければなりません。残り254個の点を作図するには、相当の作図の量になります。しかも得られる数値は$s(7,0) = 0.999701157\cdots$でありとくに1との差が重要になってくるので、かなりの精度で作図しなければ、それらしい多角形を作図することができません。たとえば、$s(7,0) = 0.999701157\cdots$を誤差1%で得たとしても、大きい方にずれてしまうと1を超えてしまい意味がなくなり、小さい方にずれると作図をつづけても44角形にしかなりません。0.1%でも、大きい方は1を超え、小さい方では123角形にしかなりません。普通の人には作図するのはほぼ不可能だといってもよいでしょう。パソコンで計算させながらやると、それなりにきれいにかけました。

正17角形のときに行ったような幾何学的な証明もできなくはないのでしょうが、質的量的に無理です。複素数に関するいくつかの定理を前提とすれば、これまでの説明でほぼ証明になっています。