（アイデアと考察）

この正 17 角形の作図法のアイデアは次のようなものです。複素数に関する知識が必要になります。旧課程では高校で学習していましたが、現在は高校では学習しません。数学の専門書など、各種参考書をご覧下さい。

$\cos\left(\frac{360}{17}\circ\right)$が作図できれば、正 17 角形が作図できます。そのために、次のような 17 次方程式を考えます。

$z^{17}=1$ …(d.i.1)

この方程式の 17 個の解（もちろん複素数の範囲で考えています）のうち、一つが

$z=\cos\left(\frac{360}{17}\circ\right)+i\sin\left(\frac{360}{17}\circ\right)$ …(d.i.2)

であって、その実部が$\cos\left(\frac{360}{17}\circ\right)$です。方程式(d.i.1)は自明な解$z=1$を持ちます。これ以外の解が問題なのですが、これは$\alpha$を

$\alpha=\cos\left(\frac{360}{17}\circ\right)+i\sin\left(\frac{360}{17}\circ\right)$…(d.i.3)

として、次のように表される 16 個の複素数です。

α^n （$n=1,2,3,\cdots16$）…(d.i.4)

これらの複素数、とくにαを２次方程式を何回か解くことによって求めることが目標です。

まず、16 個の複素数を次の 2 つのグループに分けます。

$\alpha,\alpha^2,\alpha^4,\alpha^8,\alpha^{16},\alpha^{15},\alpha^{13},\alpha^9$ と $\alpha^6,\alpha^{12},\alpha^7,\alpha^{14},\alpha^{11},\alpha^5,\alpha^{10},\alpha^3$ …(d.i.5)

それぞれのグループの和を$s(1,0)$、$s(1,1)$とします（記号$s(l,r)$の意味はあとで定めます）。この 2 数の和と積は適当な計算によって（後でしめします）

$s(1,0)+s(1,1)=-1$、$s(1,0)s(1,1)=-4$ …(d.i.6)

と求めることができます。すると、$s(1,0)$、$s(1,1)$は次の２次方程式の解であることが分かります。

$x^2+x-4=0$ …(d.i.7)

さらに(d.i.5)のそれぞれのグループを 4 個の複素数からなる 2 つに分けることにより 4 つのグループをつくり、それぞれのグループに属する数の和を解とする 2 次方程式を作ります。この操作を繰り返し続けていって、α,α^{16}の 2 数を解とする 2 次方程式が最後にできあがります。この過程で出てくる数（2 次方程式の係数および解）はすべて作図可能であり、その作図法を考えることによって、正 17 角形の作図が可能となります。

実際にやってみます。グループの分け方をうまくやらないと作図ができません。まず、(d.i.4)の 16 個の数を次のように並べます。

$a_n=\alpha^{6^n}$ （$n=0,1,2,\cdots,15$） …(d.i.8)

$\alpha^{17}=1$を用いながら具体的に書き下せば、

$a_0=\alpha$、$a_1=\alpha^6$、$a_2=\alpha^2$、$a_3=\alpha^{12}$

$a_4=\alpha^4$、$a_5=\alpha^7$、$a_6=\alpha^8$、$a_7=\alpha^{14}$

$a_8=\alpha^{16}$、$a_9=\alpha^{11}$、$a_{10}=\alpha^{15}$、$a_{11}=\alpha^5$

$a_{12}=\alpha^{13}$、$a_{13}=\alpha^{10}$、$a_{14}=\alpha^9$、$a_{15}=\alpha^3$　…(d.i.9)

となります。これを、1 個おきにとってできるのが(d.i.5)の 2 つのグループです。ここで、次のように定めます。

$$s(l,r)=\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\qquad(l=0;1,2,3、r=0,1,\cdots,2^l-1)\quad\cdots\text{(d.i.10)}$$

このようにして定めたものが、(d.i.6)の $s(1,0)$ と $s(1,1)$ です。$s(2,r)$ は 4 個ずつ 4 つのグループに分けたときの和を表しますし、$s(3,r)$ は 2 個ずつ 8 つのグループに分けたときの和を表します。$s(0,0)$ は(d.i.4)の 16 個の複素数の和で、順番を適当に入れ替えると

$$s(0,0)=\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{16}\quad\cdots\text{(d.i.11)}$$

となります。ところで、(d.i.1)は

$$z^{17}-1=0\quad\cdots\text{(d.i.12)}$$

と変形できて、さらに左辺を因数分解すると

$$(z-1)\left(z^{16}+z^{15}+\cdots+z^2+z+1\right)=0\quad\cdots\text{(d.i.13)}$$

となります。$z=\alpha$ はこの方程式の解ですから、

$$(\alpha-1)\left(\alpha^{16}+\alpha^{15}+\cdots+\alpha^2+\alpha+1\right)=0$$

ですが、$\alpha\neq1$ ですから

$$\alpha^{16}+\alpha^{15}+\cdots+\alpha^2+\alpha+1=0\quad\cdots\text{(d.i.14)}$$

すなわち

$$s(0,0)=-1\quad\cdots\text{(d.i.15)}$$

となります。$s(l,r)$ の定義より

$$s(1,0)+s(1,1)=s(0,0)\quad\cdots\text{(d.i.16)}$$

ですから

$$s(1,0)+s(1,1)=-1\quad\cdots\text{(d.i.17)}$$

であることがわかります。和が分かりましたので次は積を求めます。直接計算してもよいのですが、いくつかの表を利用して求めることにします。

次の関係式で定められる関数 $f(x)$ を考えます。$f(x)$ は 0 以上 15 以下の整数です。

$$\alpha^{1+6^x}=\alpha^{6^{f(x)}}\qquad(x=0,1,2,\cdots15)\qquad\cdots\text{(d.i.18)}$$

実際には、この関数が定義できるのは $x=0,1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15$ のときで、$x=8$ のときは定義できません。$f(x)$ の値は(d.i.9)を見ながら求めることができます。たとえば、$f(3)$ を求めると

$$\alpha^{1+6^3} = \alpha \cdot \alpha^{6^3} = \alpha \cdot a_3 = \alpha \cdot \alpha^{12} = \alpha^{13} = a_{12} = \alpha^{6^{12}} \quad \cdots \text{(d.i.19)}$$

ですから、

$$f(3) = 12 \quad \cdots \text{(d.i.20)}$$

ということになります。この要領ですべての値を計算したのが次の表です。あとで利用するので、x、$f(x)$の値を 2 進法で表したものを付け加えます。

表 1

10 進法		2 進法	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0	2	0000	0010
1	5	0001	0101
2	15	0010	1111
3	12	0011	1100
4	11	0100	1011
5	6	0101	0110
6	14	0110	1110
7	10	0111	1010
8	×	1000	×
9	3	1001	0011
10	8	1010	1000
11	1	1011	0001
12	7	1100	0111
13	9	1101	1001
14	13	1110	1101
15	4	1111	0100

まず、この表を$x = 1$の行からはじめて 1 行ごとに（xが奇数の行を）読みます。$f(x)$の値を 2 で割った余りを順に書き出すと

$f(1) \to 1$、$f(3) \to 0$、$f(5) \to 0$、$f(7) \to 0$

$f(9) \to 1$、$f(11) \to 1$、$f(13) \to 1$、$f(15) \to 0$　$\cdots$(d.i.21)

2 で割った余りは 2 進法で表したときの下 1 桁をみればわかりますから、簡単に求めることができます。この 8 個の余りを分類してみると 0 が 4 個、1 が 4 個になっています。このことから

$$s(1,0)s(1,1) = 4s(1,0) + 4s(1,1) \quad \cdots \text{(d.i.22)}$$

であることがわかるのですが、以下でそのことを証明します。

まず、

$n = 16, 17, \cdots, 31$に対しても$a_n = \alpha^{6^n}$　$\cdots$(d.i.23)

と定めることにします。$16 \le x \le 31$（$x \ne 24$）を満たす整数xに対して$f(x)$を同様に定めます。すなわち

$\alpha^{1+6^x} = \alpha^{6^{f(x)}}$　（$f(x)$は 0 以上 15 以下の整数）　$\cdots$(d.i.24)

です。適当な計算により$\alpha^{6^{16}} = \alpha$であることがわかるので、$16 \le x \le 31$（$x \ne 24$）を満たす整数xに

対して

$$a_x=\alpha^{6^x}=\alpha^{6^{x-16+16}}=\alpha^{6^{x-16}\cdot 6^{16}}=\left(\alpha^{6^{16}}\right)^{6^{x-16}}=\alpha^{6^{x-16}}=a_{x-16}$$

$$\alpha^{1+6^x}=\alpha^{1+6^{x-16}6^{16}}=\alpha\alpha^{6^{x-16}6^{16}}=\alpha\left(\alpha^{6^{16}}\right)^{6^{x-16}}=\alpha\alpha^{6^{x-16}}=\alpha^{1+6^{x-16}}\quad\cdots(\mathrm{d.i.25})$$

となりますから

$$a_{x-16}=a_x、\ f(x)=f(x-16)\quad\cdots(\mathrm{d.i.26})$$

が成り立つことがわかります。また、$2^{4-l}\le r<2^{4-l}\times 2$ を満たす整数 r に対する $s(l,r)$ を

$$s(l,r)=\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\quad\cdots(\mathrm{d.i.27})$$

として定めると、(d.i.24)より

$$s(l,r+2^l)=s(l,r)\quad（r\text{は}0\text{以上}2^{4-l}\text{未満の整数}）\quad\cdots(\mathrm{d.i.28})$$

が成り立つことがわかります。すなわち

$$r'-r\text{が}2^l（\text{の倍数}）\text{ならば}\quad s(l,r)=s(l,r')\quad\cdots(\mathrm{d.i.29})$$

が成り立つことになります。

これらを用いると積 $s(l,r)s(l,t)$ が次のように計算できます。以下では $t>r$ とします。

$$s(l,r)s(l,t)$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l j}\right)\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)+a_r\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=0}^{j-1}a_{t+2^l k}+\sum_{k=j}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)\right)+a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=2^{4-l}}^{2^{4-l}+j-1}a_{t+2^l\left(k-2^{4-l}\right)}+\sum_{k=j}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)\right)+a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=2^{4-l}}^{2^{4-l}+j-1}a_{t+2^l k-16}+\sum_{k=j}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)\right)+a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=2^{4-l}}^{2^{4-l}+j-1}a_{t+2^l k}+\sum_{k=j}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)\right)+a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{t+2^l k}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} a_{t+2^l k}\right)\right) + a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1} a_{t+2^l k}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} a_{t+2^l k}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} a_{r+2^l j}\, a_{t+2^l k}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{r+2^l j}}\, \alpha^{6^{t+2^l k}}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{r+2^l j}+6^{t+2^l k}}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{r+2^l j}\left(1+6^{t+2^l k-r-2^l j}\right)}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{t+2^l k-r-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \left(\alpha^{6^{f\left(t+2^l k-r-2^l j\right)}}\right)^{6^{r+2^l j}}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{f\left(t+2^l k-r-2^l j\right)}6^{r+2^l j}}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{f\left(t+2^l k-r-2^l j\right)+r+2^l j}}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} a_{f\left(t+2^l k-r-2^l j\right)+r+2^l j}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} a_{f\left(t-r+2^l (k-j)\right)+r+2^l j}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{m=0}^{2^{4-l}-1} a_{f\left(t-r+2^l m\right)+r+2^l j}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}a_{f\left(t-r+2^{l}m\right)+r+2^{l}j}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{2^{4-l}-1}s\left(l,f\left(t-r+2^{l}m\right)+r\right)$$

すなわち、

$$s(l,r)s(l,t)=\sum_{m=0}^{2^{4-l}-1}s\left(l,f\left(t-r+2^{l}m\right)+r\right)\quad\cdots\text{(d.i.30)}$$

が証明されました。(d.i.30)を用いると

$$s(1,0)s(1,1)=\sum_{m=0}^{7}s(1,f(1+2m))\quad\cdots\text{(d.i.31)}$$

となります。(d.i.21)(d.i.29)より

$s(1,f(1))$、$s(1,f(9))$、$s(1,f(11))$、$s(1,f(13))$は$s(1,1)$に等しく、

$s(1,f(3))$、$s(1,f(5))$、$s(1,f(7))$、$s(1,f(15))$は$s(1,0)$に等しい　…(d.i.32)

ことが分かりますので、

$$s(1,0)s(1,1)=4s(1,0)+4(1,1)\quad\cdots\text{(d.i.33)}$$

が成り立つことがわかるわけです。(d.i.17)(d.i.33)より

$$s(1,0)s(1,1)=-4\quad\cdots\text{(d.i.34)}$$

となります。ここまでで

(d.i.17)　$s(1,0)+s(1,1)=-1$

(d.i.34)　$s(1,0)s(1,1)=-4$

を導くことができました。

関数電卓やエクセルなどで計算することにより

$$s(1,0)>0>s(1,1)\quad\cdots\text{(d.i.35)}$$

であることがわかります。作図で得られるのは長さであり、長さは正の数にしかなりません。ですから作図で得られるのは$s(1,0)$と$|s(1,1)|=-s(1,1)$ですが、これを作図したものが、それぞれ、OE_1とOE_2です。符号に注意しながらまとめると次のようになります。

「差が 1、積が 4 である 2 数を作図したものがOE_1とOE_2（$\mathrm{OE}_2>\mathrm{OE}_1$）であり、$\mathrm{OE}_1=s(1,0)$、$\mathrm{OE}_2=-s(1,1)$が成り立つ。」　…(d.i.36)

続いて、(d.i.8)を 4 個ずつの 4 つのグループに分けたときのそれぞれのグループの和

$s(2,r)$　（$r=0,1,2,3$）　…(d.i.37)

を求めてみましょう。$s(l,r)$の定義により

$$s(2,0)+s(2,2)=s(1,0)\quad\cdots\text{(d.i.38)}$$

$$s(2,1)+s(2,3)=s(1,1)\quad\cdots\text{(d.i.39)}$$

が成り立ちます。積$s(2,0)s(2,2)$、$s(2,1)s(2,3)$を求めることが目標になります。

表 1 を再び活用します。$s(1,0)s(1,1)$はそのまま展開すると 64 個の項が表れますので直接計算をするのは少したいへんそうですが、$s(2,0)s(2,2)$、$s(2,1)s(2,3)$はそのまま展開しても 16 個の項しか表れません。表 1 を利用するまでもありませんが、今回は表を用いてやってみます。

まず、表 1 を$x=2$の行から始めて 4 行ごとにみてください。$f(x)$を 4 で割った余りを順に書き出

しましょう。4 で割った余りは 2 進法で表したときの下 2 桁をみれば分かりますので簡単です。2 進法で 00、01、10、11 で表される数は 10 進法でかけば、それぞれ、0、1、2、3 です。

$f(2)\to 3$、$f(6)\to 2$、$f(10)\to 0$、$f(14)\to 1$ …(d.i.40)

となります。(d.i.30)を用いると

$$s(2,0)s(2,2)=\sum_{m=0}^{3}s(2,f(2+4m)) \quad \cdots\text{(d.i.41)}$$

となります。(d.i.29)(d.i.40)(d.i.41)より

$$s(2,0)s(2,2)=s(2,0)+s(2,1)+s(2,2)+s(2,3) \quad \cdots\text{(d.i.42)}$$

(d.i.38)(d.i.39)(d.i.42)より

$$s(2,0)s(2,2)=s(1,0)+s(1,1) \quad \cdots\text{(d.i.43)}$$

このままでもよいのですが、さらに(d.i.17)(d.i.43)より

$$s(2,0)s(2,2)=-1 \quad \cdots\text{(d.i.44)}$$

となります。$s(2,1)s(2,3)$については(d.i.30)を用いると

$$s(2,1)s(2,3)=\sum_{m=0}^{3}s(2,f(2+4m)+1) \quad \cdots\text{(d.i.45)}$$

(d.i.40)は$f(2+4m)$　（$m=0,1,2,3$）を 4 で割った余りを書き出したものでしたが、これをみながら$f(2+4m)+1$を 4 で割った余りを書き出すことができます。

$f(2)\to 0$、$f(6)\to 3$、$f(10)\to 1$、$f(14)\to 2$ …(d.i.46)

(d.i.29)(d.i.45)(d.i.46)より

$$s(2,1)s(2,3)=s(2,0)+s(2,1)+s(2,2)+s(2,3) \quad \cdots\text{(d.i.47)}$$

です。$s(2,0)s(2,2)$と同様にして

$$s(2,1)s(2,3)=-1 \quad \cdots\text{(d.i.48)}$$

であることがわかります。

ここまでで$s(2,0)$、$s(2,2)$について

(d.i.38)　$s(2,0)+s(2,2)=s(1,0)$

(d.i.44)　$s(2,0)s(2,2)=-1$

$s(2,1)$、$s(2,3)$について

(d.i.39)　$s(2,1)+s(2,3)=s(1,1)$

(d.i.48)　$s(2,1)s(2,3)=-1$

であることがわかりました。やはり数値計算によって$s(2,0)>0>s(2,2)$、$s(2,3)>0>s(2,1)$であることが分かります。ですから、作図する長さは$s(2,0)$、$|s(2,2)|=-s(2,2)$、$|s(2,1)|=-s(2,1)$、$s(2,3)$の 4 つですが、これらを作図したものがそれぞれ、OI_1、OI_2、OI_3、OI_4です。符号に注意してまとめると次のようになります。

「差がOE_1、積が 1 である 2 数を作図したものがOI_1、OI_2（$\mathrm{OI}_1>\mathrm{OI}_2$）であり、$\mathrm{OI}_1=s(2,0)$、$\mathrm{OI}_2=-s(2,2)$が成り立つ。」　…(d.i.49)

「差がOE_2、積が 1 である 2 数を作図したものがOI_3、OI_4（$\mathrm{OI}_3>\mathrm{OI}_4$）であり、$\mathrm{OI}_3=-s(2,1)$、$\mathrm{OI}_4=s(2,3)$が成り立つ」　…(d.i.50)

最後に 2 個ずつ 8 個のグループに分けたときのそれぞれのグループの和

$s(3,r)$　（$r=0,1,2,3,4,5,6,7$）　…(d.i.51)

を求めます。作図に必要なのは$s(3,0)$と$s(3,4)$だけです。

$s(l,r)$の定義により

$$s(3,0)+s(3,4)=s(2,0) \quad \cdots(\mathrm{d.i.52})$$

$$s(3,3)+s(3,7)=s(2,3) \quad \cdots(\mathrm{d.i.53})$$

が成り立ちます。

表1を$x=4$の行から始めて8行ごとにみます（といってもみるのは2行だけですが…）。$f(x)$を8で割った余りを書き出します。8で割った余りは2進法で表したときの下3桁をみれば分かります。8進法3桁から10進法への書き換えは各自考えてください。

$$f(4)\to 3、f(12)\to 7 \quad \cdots(\mathrm{d.i.54})$$

となります。(d.i.30)を用いると

$$s(3,0)s(3,4)=\sum_{m=0}^{1} s(3,f(4+8m)) \quad \cdots(\mathrm{d.i.55})$$

となります。(d.i.29)(d.i.54)(d.i.55)より

$$s(3,0)s(3,4)=s(3,3)+s(3,7) \quad \cdots(\mathrm{d.i.56})$$

(d.i.53)(d.i.56)より

$$s(3,0)s(3,4)=s(2,3) \quad \cdots(\mathrm{d.i.57})$$

です。以上より$s(3,0)$と$s(3,4)$について

(d.i.52)　$s(3,0)+s(3,4)=s(2,0)$

(d.i.57)　$s(3,0)s(3,4)=s(2,3)$

が成り立つことが分かりました。

数値計算によって$s(3,0)>s(3,4)>0$であることがわかります。作図する長さは$s(3,0)$、$s(3,4)$そのものです。これらを作図したものがそれぞれOM_1、OM_2です。符号に注意してまとめると次のようになります。

「和がOI_1、積がOI_4である２数を作図したものがOM_1、OM_2（$\mathrm{OM}_1>\mathrm{OM}_2$）であり、$\mathrm{OM}_1=s(3,0)$、$\mathrm{OM}_2=s(3,4)$が成り立つ。」　$\cdots$(d.i.58)

作図したかったのはαの実部ですから、αを求めなければならないようにみえますが、αとα^{16}は互いに共役で

$$s(3,0)=\alpha+\alpha^{16} \quad \cdots(\mathrm{d.i.59})$$

ですから、

$$s(3,0)=2\cos\left(\frac{360}{17}^{\circ}\right) \quad \cdots(\mathrm{d.i.60})$$

すなわち

$$\cos\left(\frac{360}{17}^{\circ}\right)=\frac{1}{2}s(3,0) \quad \cdots(\mathrm{d.i.61})$$

です。(d.i.61)の値は正で、これを作図したものがOX_1となっています。

アイデアに関してはここまでですが、結局$s(l,r)$の値は二次方程式を繰り返し解くことで求めることがわかります。二次方程式は解の公式によって解くことができます。ただし、二次方程式の係数に$s(l,r)$の項が表れますので、実際に解くとなるとかなりたいへんです。工夫しながら解いてみ

ましょう。

まず、$t>r$ のときは(d.i.30)が成り立つのでした。

(d.i.30) $\quad s(l,r)s(l,t)=\sum_{m=0}^{2^{4-l}-1}s\left(l,f\left(t-r+2^l m\right)+r\right)$

$t=r$ のとき、すなわち $\{s(l,r)\}^2$ について同様に調べて見ます。

$$\{s(l,r)\}^2$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l j}\right)\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)+a_r\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=0}^{j-1}a_{r+2^l k}+\sum_{k=j}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)\right)+a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=2^{4-l}}^{2^{4-l}+j-1}a_{r+2^l\left(k-2^{4-l}\right)}+\sum_{k=j}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)\right)+a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=2^{4-l}}^{2^{4-l}+j-1}a_{r+2^l k-16}+\sum_{k=j}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)\right)+a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=2^{4-l}}^{2^{4-l}+j-1}a_{r+2^l k}+\sum_{k=j}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)\right)+a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1}a_{r+2^l k}\right)\right)+a_r\left(\sum_{k=0}^{2^{4-l}-1}a_{r+2^l k}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(a_{r+2^l j}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1}a_{r+2^l k}\right)\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1}a_{r+2^l j}a_{r+2^l k}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{r+2^l j}} \alpha^{6^{r+2^l k}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{r+2^l j}+6^{r+2^l k}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{r+2^l j}\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{4-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{3-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} + \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l\left(2^{3-l}+j\right)-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} + \sum_{k=2^{3-l}+j+1}^{2^{4-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{3-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} + \left(\alpha^{1+6^8}\right)^{6^{r+2^l j}} + \sum_{k=2^{3-l}+j+1}^{2^{4-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{3-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} + \left(\alpha^{0}\right)^{6^{r+2^l j}} + \sum_{k=2^{3-l}+j+1}^{2^{4-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{3-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} + 1^{6^{r+2^l j}} + \sum_{k=2^{3-l}+j+1}^{2^{4-l}+j-1} \left(\alpha^{\left(1+6^{2^l k-2^l j}\right)}\right)^{6^{r+2^l j}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{3-l}+j-1} \left(\alpha^{6^{f\left(2^l k-2^l j\right)}}\right)^{6^{r+2^l j}} + 1 + \sum_{k=2^{3-l}+j+1}^{2^{4-l}+j-1} \left(\alpha^{6^{f\left(2^l k-2^l j\right)}}\right)^{6^{r+2^l j}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{3-l}+j-1} \alpha^{6^{f\left(2^l k-2^l j\right)} 6^{r+2^l j}} + 1 + \sum_{k=2^{3-l}+j+1}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{f\left(2^l k-2^l j\right)} 6^{r+2^l j}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{3-l}+j-1} \alpha^{6^{f\left(2^l k-2^l j\right)+r+2^l j}} + 1 + \sum_{k=2^{3-l}+j+1}^{2^{4-l}+j-1} \alpha^{6^{f\left(2^l k-2^l j\right)+r+2^l j}} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{3-l}+j-1} a_{f\left(2^l k-2^l j\right)+r+2^l j} + 1 + \sum_{k=2^{3-l}+j+1}^{2^{4-l}+j-1} a_{f\left(2^l k-2^l j\right)+r+2^l j} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{k=j}^{2^{3-l}+j-1} a_{f\left(2^l (k-j)\right)+r+2^l j} + 1 + \sum_{k=2^{3-l}+j+1}^{2^{4-l}+j-1} a_{f\left(2^l (k-j)\right)+r+2^l j} \right)$$

$$=\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{m=0}^{2^{3-l}-1}a_{f\left(2^l m\right)+r+2^l j}+1+\sum_{m=2^{3-l}+1}^{2^{4-l}-1}a_{f\left(2^l m\right)+r+2^l j}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{m=0}^{2^{3-l}-1}a_{f\left(2^l m\right)+r+2^l j}\right)+\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}1+\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{m=2^{3-l}+1}^{2^{4-l}-1}a_{f\left(2^l m\right)+r+2^l j}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{2^{3-l}-1}\left(\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}a_{f\left(2^l m\right)+r+2^l j}\right)+2^{4-l}+\sum_{m=2^{3-l}+1}^{2^{4-l}-1}\left(\sum_{j=0}^{2^{4-l}-1}a_{f\left(2^l m\right)+r+2^l j}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{2^{3-l}-1}s\left(l,f\left(2^l m\right)+r\right)+2^{4-l}+\sum_{m=2^{3-l}+1}^{2^{4-l}-1}s\left(l,f\left(2^l m\right)+r\right)$$

すなわち、

$$\{s(l,r)\}^2=\sum_{m=0}^{2^{3-l}-1}s\left(l,f\left(2^l m\right)+r\right)+2^{4-l}+\sum_{m=2^{3-l}+1}^{2^{4-l}-1}s\left(l,f\left(2^l m\right)+r\right)\quad\cdots\text{(d.i.62)}$$

(d.i.30)と(d.i.62)を見比べると、(d.i.62)は$f(x)$のxが 8 の部分を除いて(d.i.30)と同様であることがわかります。例として$s(1,0)^2$を計算してみます。

表 1 の$x=0$の行から始めて 2 行ごとに（xが偶数の行を）みていきます。$f(x)$を 2 で割った余りを書き出すと

$f(0)\to 0$、$f(2)\to 1$、$f(4)\to 1$、$f(6)\to 0$
$f(8)\to\times$、$f(10)\to 0$、$f(12)\to 1$、$f(14)\to 1\quad\cdots$(d.i.63)

ですから、(d.i.62)(d.i.63)より

$$\{s(1,0)\}^2=3s(1,0)+4s(1,1)+8\quad\cdots\text{(d.i.64)}$$

が成り立つことがわかります。さらに、(d.i.16)を用いると

$$\{s(1,0)\}^2=-s(1,0)+4\quad\cdots\text{(d.i.65)}$$

となりますが、これは$s(1,0)$が(d.i.7)の解であることと同値です。
$s(1,0)$と$s(1,1)$については(d.i.62)を使うまでもありません。(d.i.17)(d.i.34)より、次の方程式を解けばよいことがわかります。

(d.i.7)　$x^2+x-4=0$

この方程式の解は次のようになります。

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\quad\cdots\text{(d.i.66)}$$

数値計算によって$s(1,0)>s(1,1)$であることが分かりますので、

$$s(1,0)=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}、s(1,1)=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\quad\cdots\text{(d.i.67)}$$

次に$s(2,0)$、$s(2,2)$を求めます。(d.i.38)(d.i.44)より次の方程式を解けばよいことがわかります。

$$x^2-s(1,0)x-1=0 \quad \cdots\text{(d.i.68)}$$

この方程式の解は

$$x=\frac{s(1,0)\pm\sqrt{\{s(1,0)\}^2+4}}{2} \quad \cdots\text{(d.i.69)}$$

この解の根号の中を計算するのに(d.i.62)と表 1 を用います。例として示したように

$$\text{(d.i.65)} \quad \{s(1,0)\}^2=-s(1,0)+4$$

だったので、

$$\{s(1,0)\}^2+4=-s(1,0)+8 \quad \cdots\text{(d.i.70)}$$

であることがわかりますので(d.i.69)は

$$x=\frac{s(1,0)\pm\sqrt{-s(1,0)+8}}{2} \quad \cdots\text{(d.i.71)}$$

となります。さらに(d.i.67)を代入して次の結論を得ます。

$$x=\frac{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\pm\sqrt{-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}+8}}{2}=\frac{-1+\sqrt{17}\pm\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4} \quad \cdots\text{(d.i.72)}$$

数値計算により$s(2,0)>s(2,2)$なので

$$s(2,0)=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}、s(2,2)=\frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4} \quad \cdots\text{(d.i.73)}$$

となります。$s(2,1)$と$s(2,3)$についても同様です。(d.i.39)(d.i.48)より、方程式は

$$x^2-s(1,1)x-1=0 \quad \cdots\text{(d.i.74)}$$

です。この方程式の解は

$$x=\frac{s(1,1)\pm\sqrt{\{s(1,1)\}^2+4}}{2} \quad \cdots\text{(d.i.75)}$$

です。(d.i.62)と表 1 を利用することにより

$$\{s(1,1)\}^2=4s(1,0)+3s(1,1)+8 \quad \cdots\text{(d.i.76)}$$

であり、これと(d.i.34)より

$$\{s(1,1)\}^2+4=-s(1,1)+8 \quad \cdots\text{(d.i.77)}$$

ですから、(d.i.75)は次のようになります。

$$x=\frac{s(1,1)\pm\sqrt{-s(1,1)+8}}{2} \quad \cdots\text{(d.i.78)}$$

これに(d.i.67)を代入して

$$x=\frac{\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\pm\sqrt{-\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}+8}}{2}=\frac{-1-\sqrt{17}\pm\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\quad\cdots\text{(d.i.79)}$$

数値計算により $s(2,3)>s(2,1)$ がわかれば、

$$s(2,1)=\frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}、s(2,3)=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\quad\cdots\text{(d.i.80)}$$

が得られます。

続いて $s(3,0)$ と $s(3,4)$ について調べます。(d.i.52)(d.i.57)より方程式は

$$x^2-s(2,0)x+s(2,3)=0\quad\cdots\text{(d.i.81)}$$

この方程式の解は

$$x=\frac{s(2,0)\pm\sqrt{\{s(2,0)\}^2-4s(2,3)}}{2}\quad\cdots\text{(d.i.82)}$$

です。(d.i.62)と表 1 を利用することにより

$$\{s(2,0)\}^2=s(2,2)+2s(2,3)+4\quad\cdots\text{(d.i.83)}$$

であることがわかります。(d.i.82)(d.i.83)より

$$x=\frac{s(2,0)\pm\sqrt{s(2,2)-2s(2,3)+4}}{2}\quad\cdots\text{(d.i.84)}$$

これに(d.i.73)(d.i.80)を代入すると

$$\begin{aligned}x&\\&=\frac{\dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}-2\cdot\dfrac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}+4}}{2}\\&=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\pm2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{8}\end{aligned}$$

$$\cdots\text{(d.i.85)}$$

となります。数値計算により $s(3,0)>s(3,4)$ が分かったとすると

$$s(3,0)=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{8}$$

$$s(3,4)=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{8}$$

$$\cdots\text{(d.i.86)}$$

です。(d.i.61)(d.i.86)より

$$\cos\left(\frac{360}{17}\circ\right)=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

…(d.i.87)

となります。関数電卓などで計算してみるとこの式の両辺の値はぴったり一致します。