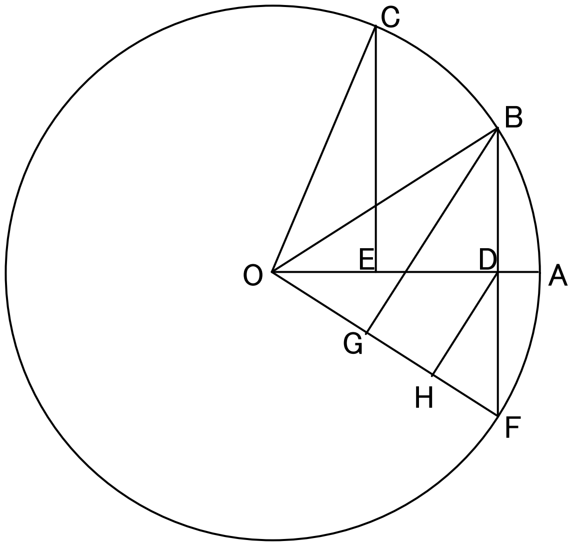
※証明のための準備

［命題１］

点Ｏを中心とし、半径が１の円周上に３点Ａ、Ｂ、Ｃがあるとする。点Ｂ、Ｃから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれＤ、Ｅとする。Ｄ、Ｅが線分OA上にあり、$\mathrm{OE}=2\mathrm{OD}^2-1$が成り立つとき、

$\angle\mathrm{AOC}=2\angle\mathrm{AOB}$

が成り立つ。



（証明）

直線OAに関して点Ｂと対称な点をＦとする。直線OFに点Ｂ、Ｄから下ろした垂線の足をＧ、Ｈとする。点Ｂが円Ｏの周上にあることと点Ｆの取り方より、

$\mathrm{OB}=\mathrm{OF}=1$　…(a.1.1)

$\mathrm{BD}=\mathrm{FD}$　…(a.1.2)

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOF}$　…(a.1.3)

点Ｇ、点Ｈの取り方より、

$\angle\mathrm{BGO}=90^\circ$　…(a.1.4)

$\angle\mathrm{DHO}=90^\circ$　…(a.1.5)

(a.1.4)(a.1.5)より

$\mathrm{BG}/\!/\mathrm{DH}$　…(a.1.6)

(a.1.2)(a.1.6)より

$\mathrm{GH}=\mathrm{HF}$　…(a.1.7)

点Ｄの取り方より

$\angle\mathrm{BDO}=90^\circ$　…(a.1.8)

(a.1.5)(a.1.8)より

$\angle\mathrm{DHO}=\angle\mathrm{BDO}$　…(a.1.9)

(a.1.3)より

$\angle\mathrm{DOB}=\angle\mathrm{HOD}$　…(a.1.10)

(a.1.9)(a.1.10)より

$\triangle DOB \backsim \triangle HOD \quad \cdots$(a.1.11)

(a.1.11)より

$OB:OD = OD:OH \quad \cdots$(a.1.12)

(a.1.12)より

$OD^2 = OB \cdot OH \quad \cdots$(a.1.13)

(a.1.1)(a.1.13)より

$OH = OD^2 \quad \cdots$(a.1.14)

O、G、H、Fの位置関係により

$GH = OH - OG \quad \cdots$(a.1.15)

$FH = OF - OH \quad \cdots$(a.1.16)

(a.1.7)(a.1.15)(a.1.16)より

$OH - OG = OF - OH \quad \cdots$(a.1.17)

(a.1.17)より

$OG = 2OH - OF \quad \cdots$(a.1.18)

(a.1.1)(a.1.14)(a.1.18)より

$OG = 2OD^2 - 1 \quad \cdots$(a.1.19)

仮定より

$OE = 2OD^2 - 1 \quad \cdots$(a.1.20)

(a.1.19)(a.1.20)より

$OG = OE \quad \cdots$(a.1.21)

点Cは円Oの周上にあるから、

$OC = 1 \quad \cdots$(a.1.22)

(a.1.1)(a.1.22)より

$OB = OC \quad \cdots$(a.1.23)

点Eの取り方により

$\angle CEO = 90^\circ \quad \cdots$(a.1.24)

(a.1.4)(a.1.24)より

$\angle BGO = \angle CEO = 90^\circ \quad \cdots$(a.1.25)

(a.1.21)(a.1.23)(a.1.25)より

$\triangle BGO \equiv \triangle CEO \quad \cdots$(a.1.26)

(a.1.26)より

$\angle GOB = \angle EOC \quad \cdots$(a.1.27)

(a.1.3)より

$\angle GOB = 2\angle DOB \quad \cdots$(a.1.28)

(a.1.27)(a.1.28)より

$\angle EOC = 2\angle DOB \quad \cdots$(a.1.29)

(a.1.29)より

$\angle AOC = 2\angle AOB$

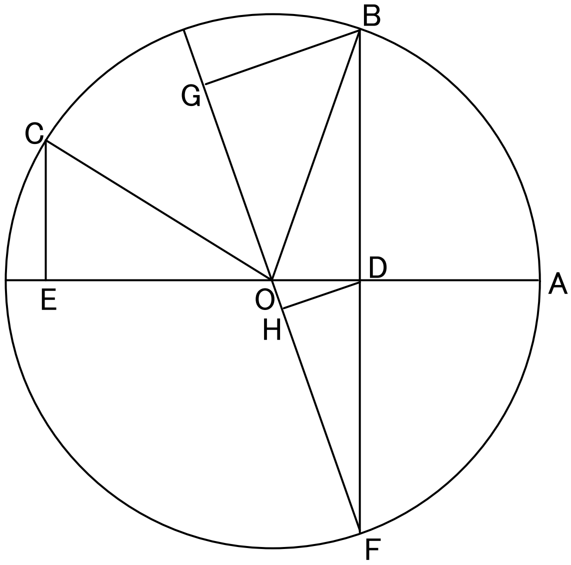
（証明終わり）

［命題２］

点Ｏを中心とし、半径が１の円周上に３点Ａ、Ｂ、Ｃがあるとする。点Ｂ、Ｃから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれＤ、Ｅとする。Ｄが線分OA上にあり、Ｅが線分OAのＯの側の延長上にあって、$\mathrm{OE}=1-2\mathrm{OD}^2$ が成り立つとき、

$\angle\mathrm{AOC}=2\angle\mathrm{AOB}$

が成り立つ。



（証明）

直線OAに関して点Ｂと対称な点をＦとする。直線OFに点Ｂ、Ｄから下ろした垂線の足をそれぞれＧ、Ｈとする。点Ｂが円Ｏの周上にあることと点Ｆの取り方より、

$\mathrm{OB}=\mathrm{OF}=1$ …(a.2.1)

$\mathrm{BD}=\mathrm{FD}$ …(a.2.2)

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOF}$ …(a.2.3)

点Ｇ、点Ｈの取り方より、

$\angle\mathrm{BGO}=90°$ …(a.2.4)

$\angle\mathrm{DHO}=90°$ …(a.2.5)

(a.2.4)(a.2.5)より

$\mathrm{BG}/\!/\mathrm{DH}$ …(a.2.6)

(a.2.2)(a.2.6)より

$\mathrm{GH}=\mathrm{HF}$ …(a.2.7)

点Ｄの取り方より

$\angle\mathrm{BDO}=90°$ …(a.2.8)

(a.2.5)(a.2.8)より

$\angle\mathrm{DHO}=\angle\mathrm{BDO}$ …(a.2.9)

(a.2.3)より

$\angle\mathrm{DOB}=\angle\mathrm{HOD}$ …(a.2.10)

(a.2.9)(a.2.10)より

$\triangle \mathrm{DOB} \backsim \triangle \mathrm{HOD}$ …(a.2.11)

(a.2.11)より

$\mathrm{OB}:\mathrm{OD} = \mathrm{OD}:\mathrm{OH}$ …(a.2.12)

(a.2.12)より

$\mathrm{OD}^2 = \mathrm{OB} \cdot \mathrm{OH}$ …(a.2.13)

(a.2.1)(a.2.13)より

$\mathrm{OH} = \mathrm{OD}^2$ …(a.2.14)

O、G、H、Fの位置関係により

$\mathrm{GH} = \mathrm{OH} + \mathrm{OG}$ …(a.2.15)

$\mathrm{FH} = \mathrm{OF} - \mathrm{OH}$ …(a.2.16)

(a.2.7)(a.2.15)(a.2.16)より

$\mathrm{OH} + \mathrm{OG} = \mathrm{OF} - \mathrm{OH}$ …(a.2.17)

(a.2.17)より

$\mathrm{OG} = \mathrm{OF} - 2\mathrm{OH}$ …(a.2.18)

(a.2.1)(a.2.14)(a.2.18)より

$\mathrm{OG} = 1 - 2\mathrm{OD}^2$ …(a.2.19)

仮定より

$\mathrm{OE} = 1 - 2\mathrm{OD}^2$ …(a.2.20)

(a.2.19)(a.2.20)より

$\mathrm{OG} = \mathrm{OE}$ …(a.2.21)

点Cは円Oの周上にあるから、

$\mathrm{OC} = 1$ …(a.2.22)

(a.2.1)(a.2.22)より

$\mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ …(a.2.23)

点Eの取り方により

$\angle \mathrm{CEO} = 90^\circ$ …(a.2.24)

(a.2.4)(a.2.24)より

$\angle \mathrm{BGO} = \angle \mathrm{CEO} = 90^\circ$ …(a.2.25)

(a.2.21)(a.2.23)(a.2.25)より

$\triangle \mathrm{BGO} \equiv \triangle \mathrm{CEO}$ …(a.2.26)

(a.2.26)より

$\angle \mathrm{GOB} = \angle \mathrm{EOC}$ …(a.2.27)

(a.2.3)より

$\angle \mathrm{BOF} = 2\angle \mathrm{DOB}$ …(a.2.28)

F、O、Gはこの順に同一直線上にあるから、

$\angle \mathrm{GOB} = 180^\circ - \angle \mathrm{BOF}$ …(a.2.29)

(a.2.28)(a.2.29)より

$\angle \mathrm{GOB} = 180^\circ - 2\angle \mathrm{DOB}$ …(a.2.30)

(a.2.27)(a.2.30)より

$$\angle EOC = 180° - 2\angle DOB \quad \cdots(a.2.31)$$

Ａ、Ｏ、Ｅはこの順に同一直線上にあるから、

$$\angle AOC + \angle EOC = 180° \quad \cdots(a.2.32)$$

(a.2.31)(a.2.32)より

$$\angle AOC + 180° - 2\angle DOB = 180° \quad \cdots(a.2.33)$$

(a.2.33)より

$$\angle AOC = 2\angle DOB \quad \cdots(a.2.34)$$

(a.2.34)より

$$\angle AOC = 2\angle AOB$$

（証明終わり）

［命題３］

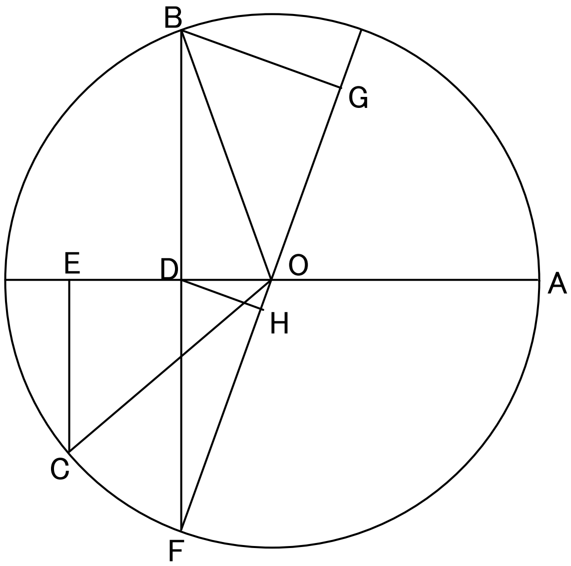
点Oを中心とし、半径が1の円周上に3点A、B、Cがあるとする。点B、Cから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれD、Eとする。D、Eが線分OAのOの側の延長上にあって、$OE = 1 - 2OD^2$ が成り立つとき、

優角 $AOC = 2\angle AOB$　すなわち　$\angle EOC + 180^\circ = 2\angle AOB$

が成り立つ。

（注意）

同一直線上にない２つの半直線から作られる角は２つあって、大きい方を優角、小さい方を劣角という。$\angle ABC$のように書いた場合、とくに断りがないかぎり劣角を表す。



（証明）

直線OAに関して点Bと対称な点をFとする。直線OFに点B、Dから下ろした垂線の足をそれぞれG、Hとする。点Bが円Oの周上にあることと点Fの取り方より、

$OB = OF = 1$　$\cdots$(a.3.1)

$BD = FD$　$\cdots$(a.3.2)

$\angle DOB = \angle DOF$　$\cdots$(a.3.3)

点G、点Hの取り方より、

$\angle BGO = 90^\circ$　$\cdots$(a.3.4)

$\angle DHO = 90^\circ$　$\cdots$(a.3.5)

(a.3.4)(a.3.5)より

$BG /\!/ DH$　$\cdots$(a.3.6)

(a.3.2)(a.3.6)より

$GH = HF$　$\cdots$(a.3.7)

点Dの取り方より

$\angle BDO = 90^\circ$　$\cdots$(a.3.8)

(a.3.5)(a.3.8)より

$\angle DHO = \angle BDO \quad \cdots$(a.3.9)

(a.3.3)より

$\angle DOB = \angle HOD \quad \cdots$(a.3.10)

(a.3.9)(a.3.10)より

$\triangle DOB \backsim \triangle HOD \quad \cdots$(a.3.11)

(a.3.11)より

$OB : OD = OD : OH \quad \cdots$(a.3.12)

(a.3.12)より

$OD^2 = OB \cdot OH \quad \cdots$(a.3.13)

(a.3.1)(a.3.13)より

$OH = OD^2 \quad \cdots$(a.3.14)

O、G、H、Fの位置関係により

$GH = OH + OG \quad \cdots$(a.3.15)

$FH = OF - OH \quad \cdots$(a.3.16)

(a.3.7)(a.3.15)(a.3.16)より

$OH + OG = OF - OH \quad \cdots$(a.3.17)

(a.3.17)より

$OG = OF - 2OH \quad \cdots$(a.3.18)

(a.3.1)(a.3.14)(a.3.18)より

$OG = 1 - 2OD^2 \quad \cdots$(a.3.19)

仮定より

$OE = 1 - 2OD^2 \quad \cdots$(a.3.20)

(a.3.19)(a.3.20)より

$OG = OE \quad \cdots$(a.3.21)

点Cは円Oの周上にあるから、

$OC = 1 \quad \cdots$(a.3.22)

(a.3.1)(a.3.22)より

$OB = OC \quad \cdots$(a.3.23)

点Eの取り方により

$\angle CEO = 90^\circ \quad \cdots$(a.3.24)

(a.3.4)(a.3.24)より

$\angle BGO = \angle CEO = 90^\circ \quad \cdots$(a.3.25)

(a.3.21)(a.3.23)(a.3.25)より

$\triangle BGO \equiv \triangle CEO \quad \cdots$(a.3.26)

(a.3.26)より

$\angle GOB = \angle EOC \quad \cdots$(a.3.27)

(a.3.3)より

$\angle BOF = 2\angle DOB \quad \cdots$(a.3.28)

F、O、Gはこの順に同一直線上にあるから、

$$\angle GOB = 180^\circ - \angle BOF \quad \cdots(a.3.29)$$

(a.3.28)(a.3.29)より

$$\angle GOB = 180^\circ - 2\angle DOB \quad \cdots(a.3.30)$$

(a.3.27)(a.3.30)より

$$\angle EOC = 180^\circ - 2\angle DOB \quad \cdots(a.3.31)$$

Ａ、Ｏ、Ｅはこの順に同一直線上にあるから、

$$\angle DOB = 180^\circ - \angle AOB \quad \cdots(a.3.32)$$

(a.3.31)(a.3.32)より

$$\angle EOC = 180^\circ - 2(180^\circ - \angle AOB) \quad \cdots(a.3.33)$$

(a.3.33)より

$$\angle EOC + 180^\circ = 2\angle AOB$$

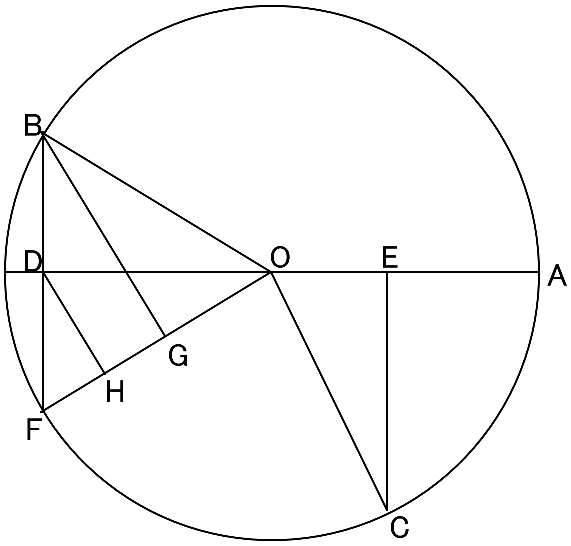
（証明終わり）

［命題４］

点Ｏを中心とし、半径が１の円周上に３点Ａ、Ｂ、Ｃがあるとする。点Ｂ、Ｃから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれＤ、Ｅとする。Ｄが線分OAのＯの側の延長上にありＥが線分OA上にあって、$\mathrm{OE}=2\mathrm{OD}^2-1$が成り立つとき、

優角 $\mathrm{AOC}=2\angle\mathrm{AOB}$　すなわち　$\angle\mathrm{DOC}+180°=2\angle\mathrm{AOB}$

が成り立つ。



（証明）

直線OAに関して点Ｂと対称な点をＦとする。直線OFに点Ｂ、Ｄから下ろした垂線の足をそれぞれＧ、Ｈとする。点Ｂが円Ｏの周上にあることと点Ｆの取り方より、

$\mathrm{OB}=\mathrm{OF}=1$　…(a.4.1)

$\mathrm{BD}=\mathrm{FD}$　…(a.4.2)

$\angle\mathrm{DOB}=\angle\mathrm{DOF}$　…(a.4.3)

点Ｇ、点Ｈの取り方より、

$\angle\mathrm{BGO}=90°$　…(a.4.4)

$\angle\mathrm{DHO}=90°$　…(a.4.5)

(a.4.4)(a.4.5)より

$\mathrm{BG}/\!/\mathrm{DH}$　…(a.4.6)

(a.4.2)(a.4.6)より

$\mathrm{GH}=\mathrm{HF}$　…(a.4.7)

点Ｄの取り方より

$\angle\mathrm{BDO}=90°$　…(a.4.8)

(a.4.5)(a.4.8)より

$\angle\mathrm{DHO}=\angle\mathrm{BDO}$　…(a.4.9)

(a.4.3)より

$\angle\mathrm{DOB}=\angle\mathrm{HOD}$　…(a.4.10)

(a.4.9)(a.4.10)より

$\triangle DOB \backsim \triangle HOD$ …(a.4.11)

(a.4.11)より

$OB:OD = OD:OH$ …(a.4.12)

(a.4.12)より

$OD^2 = OB \cdot OH$ …(a.4.13)

(a.4.1)(a.4.13)より

$OH = OD^2$ …(a.4.14)

O、G、H、Fの位置関係により

$GH = OH - OG$ …(a.4.15)

$FH = OF - OH$ …(a.4.16)

(a.4.7)(a.4.15)(a.4.16)より

$OH - OG = OF - OH$ …(a.4.17)

(a.4.17)より

$OG = 2OH - OF$ …(a.4.18)

(a.4.1)(a.4.14)(a.4.18)より

$OG = 2OD^2 - 1$ …(a.4.19)

仮定より

$OE = 2OD^2 - 1$ …(a.4.20)

(a.4.19)(a.4.20)より

$OG = OE$ …(a.4.21)

点Cは円Oの周上にあるから、

$OC = 1$ …(a.4.22)

(a.4.1)(a.4.22)より

$OB = OC$ …(a.4.23)

点Eの取り方により

$\angle CEO = 90°$ …(a.4.24)

(a.4.4)(a.4.24)より

$\angle BGO = \angle CEO = 90°$ …(a.4.25)

(a.4.21)(a.4.23)(a.4.25)より

$\triangle BGO \equiv \triangle CEO$ …(a.4.26)

(a.4.26)より

$\angle GOB = \angle EOC$ …(a.4.27)

(a.4.3)より

$\angle GOB = 2\angle DOB$ …(a.4.28)

(a.4.27)(a.4.28)より

$\angle EOC = 2\angle DOB$ …(a.4.29)

A、O、Dはこの順に同一直線上にあるから、

$\angle EOC = 180° - \angle DOC$ …(a.4.30)

$\angle DOB = 180° - \angle AOB$ …(a.4.31) (a.4.29)(a.4.30)(a.4.31)より

$$180° - \angle \mathrm{DOC} = 2(180° - \angle \mathrm{AOB}) \quad \cdots \text{(a.4.32)}$$

(a.4.32)より

$$\angle \mathrm{DOC} + 180° = 2\angle \mathrm{AOB}$$

（証明終わり）