★四次方程式の解の公式
（“三次方程式の解の公式”も読んでおいてください。）
四次方程式の一般形は次のようになります。

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$　（a, b, c, d, e は実数で $a \neq 0$）　…（１）

以下では、「フェラーリの方法」と呼ばれる方法にしたがって、この方程式を解いていきます。
まず、両辺を a で割ります。

$$x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0 \quad \cdots（２）$$

ただし、

$$A_3 = \frac{b}{a}、A_2 = \frac{c}{a}、A_1 = \frac{d}{a}、A_0 = \frac{e}{a} \quad \cdots（３）$$

次に、

$$y = x + \frac{A_3}{4} \quad \cdots（４）$$

と置き換えます。整理すると次のようになります。

$$y^4 + B_2 y^2 + B_1 y + B_0 = 0 \quad \cdots（５）$$

ただし

$$B_2 = -\frac{3}{8}A_3{}^2 + A_2、B_1 = \frac{1}{8}A_3{}^3 - \frac{1}{2}A_3 A_2 + A_1$$

$$B_0 = -\frac{3}{256}A_3{}^4 + \frac{1}{16}A_3{}^2 A_2 - \frac{1}{4}A_3 A_1 + A_0 \quad \cdots（６）$$

次に、一次の項と定数項を移項します。

$$y^4 + B_2 y^2 = -B_1 y - B_0 \quad \cdots（７）$$

（ｉ）$B_1 = 0$ の場合

このｙの方程式は“複二次”と呼ばれる形になっているので、簡単に解くことができます。

$$z = y^2 \quad \cdots（８）$$

として

$$z^2 + B_2 z + B_0 = 0 \quad \cdots（９）$$

ですから

$$z = \frac{1}{2}\left(-B_2 \pm \sqrt{B_2{}^2 - 4B_0}\right) \quad \cdots（10）$$

ですし、（8）より

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-B_2\pm\sqrt{B_2{}^2-4B_0}\right)}\quad（複号任意）\quad\cdots（11）$$

となります。

（ⅱ）$B_1\neq 0$ の場合

両辺に ty^2 （t は複素数の定数で $t\neq 0$ とする。値は後で定める。）を加えます。

$$y^4+(B_2+t)y^2=ty^2-B_1y-B_0\quad\cdots（12）$$

両辺を平方完成します。

$$\left\{y^2+\frac{1}{2}(B_2+t)\right\}^2-\frac{1}{4}(B_2+t)^2=t\left(y-\frac{1}{2t}B_1\right)^2-\frac{1}{4t}B_1{}^2-B_0\quad\cdots（13）$$

剰余項を右辺に移項します。

$$\left\{y^2+\frac{1}{2}(B_2+t)\right\}^2=t\left(y-\frac{1}{2t}B_1\right)^2-\frac{1}{4t}B_1{}^2-B_0+\frac{1}{4}(B_2+t)^2\quad\cdots（14）$$

右辺に集めた剰余項が 0 になるように t を定めます。すなわち

$$-\frac{1}{4t}B_1{}^2-B_0+\frac{1}{4}(B_2+t)^2=0\quad\cdots（15）$$

が成り立つように t を定めるのですが、これを整理すると三次方程式が得られます。

$$t^3+C_2t^2+C_1t+C_0=0\quad\cdots（16）$$

ただし、

$$C_2=2B_2、C_1=B_2{}^2-4B_0、C_0=-B_1{}^2\quad\cdots（17）$$

これを複素数の範囲で解きます（“三次方程式の解の公式”を参照してください)。解を

$$t=t_1,t_2,t_3\quad\cdots（18）$$

とします（$B_1\neq 0$ より $C_0\neq 0$ ですから、これらの解はすべて 0 と異なります)。たとえば $t=t_1$ とすれば（12）より

$$\left\{y^2+\frac{1}{2}(B_2+t_1)\right\}^2=t_1\left(y-\frac{1}{2t_1}B_1\right)^2\quad\cdots（19）$$

となります。両辺の平方根をとります。一般には t_1 は複素数です。$\sqrt{t_1}$ は t_1 の平方根のうちのひとつをあらわすことにします。これに従えば

$$y^2+\frac{1}{2}(B_2+t_1)=\pm\sqrt{t_1}\left(y-\frac{1}{2t_1}B_1\right)\quad\cdots（20）$$

これは y の（２本の）二次方程式です。これを整理します。

$$D_2 y^2 + D_1 y + D_0 = 0 \quad \cdots (21)$$

ただし、

$$D_2 = 2t_1 、 D_1 = \mp 2t_1 \sqrt{t_1} 、 D_0 = B_2 t_1 + t_1^2 \pm \sqrt{t_1} B_1 \quad \cdots (22)$$

（複号は（20）の複号に対して同順にとります。）

この二次方程式を（複素数の範囲で）解くと y が得られます。二次方程式は２個の解を持ちますが、（20）の複号のとり方によって、２本の二次方程式が立っていますので、解は合計４個得られることになります。これを

$$y = y_1, y_2, y_3, y_4 \quad \cdots (23)$$

とします。（４）より x を求めることができます。

$$x = -\frac{A_3}{4} + y_1, -\frac{A_3}{4} + y_2, -\frac{A_3}{4} + y_3, -\frac{A_3}{4} + y_4 \quad \cdots (24)$$

次の方程式を例に実行してみます。

$$2x^4 + x^3 - 2x - 1 = 0 \quad \cdots (25)$$

まず、両辺を２で割ります。

$$x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots (26)$$

次のように置き換えます。

$$y = x + \frac{1}{8} \quad \cdots (27)$$

これを x について解くと

$$x = y - \frac{1}{8} \quad \cdots (28)$$

（26）に代入します。

$$\left(y - \frac{1}{8}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{8}\right)^3 - \left(y - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots (29)$$

整理します。

$$y^4 - \frac{3}{32}y^2 - \frac{63}{64}y - \frac{1539}{4096} = 0 \quad \cdots (30)$$

移項します。

$$y^4 - \frac{3}{32}y^2 = \frac{63}{64}y + \frac{1539}{4096} \quad \cdots (31)$$

両辺に ty^2 を加えます。

$$y^4+\left(t-\frac{3}{32}\right)y^2=ty^2+\frac{63}{64}y+\frac{1539}{4096} \quad \cdots (32)$$

両辺を平方完成します。

$$\left\{y^2+\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{64}\right)\right\}^2-\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{64}\right)^2=t\left(y+\frac{63}{128t}\right)^2-\frac{3969}{16384t}+\frac{1539}{4096} \quad \cdots (33)$$

剰余項を移項します。

$$\left\{y^2+\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{64}\right)\right\}^2=t\left(y+\frac{63}{128t}\right)^2+\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{64}\right)^2-\frac{3969}{16384t}+\frac{1539}{4096} \quad \cdots (34)$$

剰余項＝0 という方程式を立てます。

$$\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{64}\right)^2-\frac{3969}{16384t}+\frac{1539}{4096}=0 \quad \cdots (35)$$

これを整理します。

$$4096t^3-768t^2+6192t-3969=0 \quad \cdots (36)$$

これを「カルダノの方法」で解きます。両辺を 4096 で割ります。

$$t^3-\frac{3}{16}t^2+\frac{387}{256}t-\frac{3969}{4096}=0 \quad \cdots (37)$$

次のように置き換えます。

$$u=t-\frac{1}{16} \quad \cdots (38)$$

これを t について解きます。

$$t=u+\frac{1}{16} \quad \cdots (39)$$

（37）に代入します。

$$\left(u+\frac{1}{16}\right)^3-\frac{3}{16}\left(u+\frac{1}{16}\right)^2+\frac{387}{256}\left(u+\frac{1}{16}\right)-\frac{3969}{4096}=0 \quad \cdots (40)$$

これを整理します。

$$u^3+\frac{3}{2}u-\frac{7}{8}=0 \quad \cdots (41)$$

さらに

$$\begin{cases} v+w=u \\ vw=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \cdots (42)$$

とします。（41）（42）より

$$\begin{cases} v^3+w^3=\dfrac{7}{8} \\ vw=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \cdots (43)$$

となります。第２式を３乗して

$$\begin{cases} v^3+w^3=\dfrac{7}{8} \\ v^3w^3=-\dfrac{1}{8} \end{cases} \quad \cdots (44)$$

を得ます。(44) より v^3, w^3 を解とする二次方程式を立てることができます。

$$z^2-\frac{7}{8}z-\frac{1}{8}=0 \quad \cdots (45)$$

この方程式を解くと

$$8z^2-7z-1=0$$

$$(8z+1)(z-1)=0$$

$$z=-\frac{1}{8}、\ z=1 \quad \cdots (46)$$

です。

$$v^3=-\frac{1}{8}、\ w^3=1 \quad \cdots (47)$$

としても一般性は失われません。さらに立方根をとって

$$v=-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\omega,-\frac{1}{2}\omega^2、\ w=1,\omega,\omega^2 \quad \cdots (48)$$

となりますが、このうちで (42) の第２式を満たすのは、

$$(v,w)=\left(-\frac{1}{2},1\right),\left(-\frac{1}{2}\omega,\omega^2\right),\left(-\frac{1}{2}\omega^2,\omega\right) \quad \cdots (49)$$

したがって、

$$u=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\omega+\omega^2,-\frac{1}{2}\omega^2+\omega \quad \cdots (50)$$

となります。さらに (39) より

$$t=\frac{9}{16},\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\omega+\omega^2,\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\omega^2+\omega \quad \cdots (51)$$

これ以降は

$$t=\frac{9}{16} \quad \cdots (52)$$

をとって進めます。(34) より

$$\left(y^2+\frac{15}{64}\right)^2=\frac{9}{16}\left(y+\frac{7}{8}\right)^2 \quad \cdots (53)$$

両辺の平方根をとって

$$y^2+\frac{15}{64}=\frac{3}{4}\left(y+\frac{7}{8}\right) \quad \text{または} \quad y^2+\frac{15}{64}=-\frac{3}{4}\left(y+\frac{7}{8}\right) \quad \cdots (54)$$

これを整理して

$$64y^2-48y-27=0 \quad \text{または} \quad 64y^2+48y+57=0 \quad \cdots (55)$$

この二次方程式を解くと

$$y=\frac{9}{8},-\frac{3}{8} \quad \text{または} \quad y=\frac{-3\pm4\sqrt{3}i}{8} \quad \cdots (56)$$

（28）より

$$x=1,-\frac{1}{2},\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \quad \cdots (57)$$

この「解法」を「公式」風に書くと次のようになります。

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \quad (a,b,c,d,e \text{は実数で} a\neq0) \quad \cdots (1)$$

の解は

$$A_3=\frac{b}{a}、A_2=\frac{c}{a}、A_1=\frac{d}{a}、A_0=\frac{e}{a} \quad \cdots (3)$$

$$B_2=-\frac{3}{8}A_3{}^2+A_2、B_1=\frac{1}{8}A_3{}^3-\frac{1}{2}A_3A_2+A_1$$

$$B_0=-\frac{3}{256}A_3{}^4+\frac{1}{16}A_3{}^2A_2-\frac{1}{4}A_3A_1+A_0 \quad \cdots (6)$$

$$C_2=2B_2、C_1=B_2{}^2-4B_0、C_0=-B_1{}^2 \quad \cdots (17)$$

$t^3+C_2t^2+C_1t+C_0=0 \quad \cdots (16)$　の解のひとつを $t=t_1$

$$D_2=2t_1、D_1=\mp2t_1\sqrt{t_1}、D_0=B_2t_1+t_1{}^2\pm\sqrt{t_1}B_1 \quad \cdots (22)$$

とすると

$$x=-\frac{A_3}{4}+\frac{-D_1\pm\sqrt{D_1{}^2-4D_2D_0}}{2D_2} \quad \cdots (58)$$

D_0,D_1,D_2 は複号のとり方によって、２通りを考えるものとし、それに応じて（58）を満たす x が２個ずつ得られるので、合計４個（重解は重複度の分数える）の解が得られる。

途中で（16）の三次方程式を解いて、この解のひとつを$t=t_1$として進めていますが、ここのとり方によって最後の解が異なるわけではありません。$t=t_2$としても同じ解が得られなければならないはずですが、（58）はそのような形をしているようには見えません。
（18）では（16）の解を$t=t_1,t_2,t_3$としていました。このt_1の平方根（複素数の範囲で考えています）のうちひとつを$\sqrt{t_1}$としたわけですが、同様に$\sqrt{t_2}$、$\sqrt{t_3}$を考えることにします。解と係数の関係より

$$t_1 t_2 t_3 = -C_0 = {B_1}^2 \quad \cdots（59）$$

が成り立ちますから、

$$\left(\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}\right)^2 = t_1 t_2 t_3 = {B_1}^2 \quad \cdots（60）$$

したがって

$$\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3} = \pm B_1 \quad \cdots（61）$$

です。$\sqrt{t_1},\sqrt{t_2},\sqrt{t_3}$はそれぞれ２通りずつとり方がありますが、うまく選べば

$$\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3} = -B_1 \quad \cdots（62）$$

を満たすように$\sqrt{t_1},\sqrt{t_2},\sqrt{t_3}$をとることができます。以下このようにとってあるものとして、話を進めます。（58）の根号の中の式を（22）を用いて計算してみます。（16）の方程式に関する解と係数の関係、（17）を用います。

$$\begin{aligned}
&{D_1}^2 - 4D_2 D_0 \\
&= \left(\mp 2t_1\sqrt{t_1}\right)^2 - 4\cdot 2t_1\cdot\left(B_2 t_1 + {t_1}^2 \pm \sqrt{t_1}B_1\right) \\
&= 4{t_1}^3 - 8{t_1}^2 B_2 - 8{t_1}^3 \mp 8t_1\sqrt{t_1}B_1 \\
&= -4{t_1}^3 - 8{t_1}^2 B_2 \mp 8t_1\sqrt{t_1}B_1 \\
&= 4{t_1}^2\left(-t_1 - 2B_2 \mp 2\frac{B_1}{\sqrt{t_1}}\right)
\end{aligned}$$

$$= 4{t_1}^2\left(t_2 + t_3 \mp 2\frac{-\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}}{\sqrt{t_1}}\right)$$

$$= 4{t_1}^2\left(t_2 + t_3 \pm 2\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}\right)$$

$$= 4{t_1}^2\left(\sqrt{t_2} \pm \sqrt{t_3}\right)^2 \quad \cdots (63)$$

複号の関係をわかりやすくするため、場合わけします。

（ｉ）

$$D_2 = 2t_1、D_1 = -2t_1\sqrt{t_1}、D_0 = B_2 t_1 + {t_1}^2 + \sqrt{t_1}B_1 \quad \cdots (64)$$

の場合は

$${D_1}^2 - 4D_2 D_0 = 4{t_1}^2\left(\sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right) = \left\{2t_1\left(\sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)\right\}^2 \quad \cdots (65)$$

なので

$$x = -\frac{A_3}{4} + \frac{-\left(-2t_1\sqrt{t_1}\right) \pm 2t_1\left(\sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)}{4t_1}$$

$$x = -\frac{A_3}{4} + \frac{\sqrt{t_1} \pm \sqrt{t_2} \pm \sqrt{t_3}}{2} \quad \cdots (66) \qquad \text{（複号同順）}$$

（ⅱ）

$$D_2 = 2t_1、D_1 = 2t_1\sqrt{t_1}、D_0 = B_2 t_1 + {t_1}^2 - \sqrt{t_1}B_1 \quad \cdots (67)$$

の場合は

$${D_1}^2 - 4D_2 D_0 = 4{t_1}^2\left(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right) = \left\{2t_1\left(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right)\right\}^2 \quad \cdots (68)$$

なので

$$x = -\frac{A_3}{4} + \frac{-\left(2t_1\sqrt{t_1}\right) \pm 2t_1\left(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}\right)}{4t_1}$$

$$x = -\frac{A_3}{4} + \frac{-\sqrt{t_1} \pm \sqrt{t_2} \mp \sqrt{t_3}}{2} \quad \cdots (69) \qquad \text{（複号同順）}$$

まとめると、すべて

$$x = -\frac{A_3}{4} + \frac{l\sqrt{t_1} + m\sqrt{t_2} + n\sqrt{t_3}}{2} \quad \cdots (70)$$

の形で表すことができて、l、m、n は

$$(l,m,n)=(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1) \quad \cdots（71）$$

のいずれかであるということになります。このことを踏まえて書き直すと次のようになります。

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \quad （a,b,c,d,e \text{は実数で} a\neq 0） \quad \cdots（１）$$

の解は

$$A_3=\frac{b}{a}、A_2=\frac{c}{a}、A_1=\frac{d}{a}、A_0=\frac{e}{a} \quad \cdots（３）$$

$$B_2=-\frac{3}{8}A_3{}^2+A_2、B_1=\frac{1}{8}A_3{}^3-\frac{1}{2}A_3A_2+A_1$$

$$B_0=-\frac{3}{256}A_3{}^4+\frac{1}{16}A_3{}^2A_2-\frac{1}{4}A_3A_1+A_0 \quad \cdots（６）$$

$$C_2=2B_2、C_1=B_2{}^2-4B_0、C_0=-B_1{}^2 \quad \cdots（17）$$

$$t^3+C_2t^2+C_1t+C_0=0 \quad \cdots（16） \quad \text{の解を} t=t_1,t_2,t_3$$

とすると

$$x=-\frac{A_3}{4}+\frac{l\sqrt{t_1}+m\sqrt{t_2}+n\sqrt{t_3}}{2} \quad \cdots（70）$$

ただし、$\sqrt{t_1},\sqrt{t_2},\sqrt{t_3}$ はそれぞれt_1,t_2,t_3の（複素数の範囲での）平方根のいずれかをあらわし、

$$\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}=-B_1 \quad \cdots（62）$$

を満たすようにとるとする。また、l、m、nは次のいずれかの値であるとし、それによって４個の解が得られる。

$$(l,m,n)=(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1) \quad \cdots（71）$$

途中（７）の後で場合わけをしました。（ⅱ）の条件として$B_1\neq 0$としましたが、実際には（16）の解で 0 でないものがあれば、それをt_1として進めることで、後の議論はそのまま大丈夫です。ですから、問題になるのは（16）の解が 3 重解でそれが 0 の場合ですが、この条件は$C_1=C_2=C_3=0$、すなわち、$B_1=B_2=B_3=0$です。この場合は（ⅰ）にしたがって進めれば、（１）の解は

$$x=-\frac{A_3}{4} \quad \cdots（72）$$

ですが、これと（70）を比較すると、この場合でも（70）の形に表現できていて、結局ど

ういう場合でも（70）が解であることがわかります。

これで解の公式ができたといってもよいのですが、かなり煩雑ですね。それに（16）のところで三次方程式を解く必要が生じます。因数分解などで簡単に求めることができる場合はいいのですが、そうでない場合はなんらかの方法（たとえば「カルダノの方法」）で解く必要があります。これでは「解の公式」とは言いがたいです。

ということで、三次方程式の解の公式のときと同じようにもう少し直接的な表記をしてみたいと思います。順番に代入していって、$A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2, C_0, \cdots$ を a,b,c,d,e を用いた式で表していきます。途中で三次方程式を解く必要がありますので、三次方程式の解の公式も利用します。計算は、ソウトウに、タイヘンです。
これを実行したものは次のようになります。しかし、用紙サイズをＡ３にしても入りきらないので、同じ部分を置き換えて書きます。

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$　（a,b,c,d,e は実数で $a\neq 0$）
の解は

$p_1=-8ac+3b^2$
$p_2=-72ace+27ad^2+27b^2e-9bcd+2c^3$

$$p_3=-256a^3e^3+192a^2bde^2+128a^2c^2e^2-144a^2cd^2e+27a^2d^4-144ab^2ce^2+6ab^2d^2e+80abc^2de-18abcd^3-16ac^4e+4ac^3d^2+27b^4e^2-18b^3cde+4b^3d^3+4b^2c^3e-b^2c^2d^2$$

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$、$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$（逆でもよい）
とすると、

$$x=\frac{1}{12a}\left(-3b+l\sqrt{3\left(p_1+2a\left(\sqrt[3]{4\left(p_2+3\sqrt{3p_3}\right)}+\sqrt[3]{4\left(p_2-3\sqrt{3p_3}\right)}\right)\right)}+m\sqrt{3\left(p_1+2a\left(\omega\sqrt[3]{4\left(p_2+3\sqrt{3p_3}\right)}+\omega^2\sqrt[3]{4\left(p_2-3\sqrt{3p_3}\right)}\right)\right)}+n\sqrt{3\left(p_1+2a\left(\omega^2\sqrt[3]{4\left(p_2+3\sqrt{3p_3}\right)}+\omega\sqrt[3]{4\left(p_2-3\sqrt{3p_3}\right)}\right)\right)}\right)$$

ただし、根号は複素数の範囲で考えて該当するべき乗根のうちのひとつを表すものとする。さらに、同じ表記のものは同じ数をとるものとし、次の式を満たすようにとる。

$$\sqrt[3]{4\left(p_2+3\sqrt{3p_3}\right)}\sqrt[3]{4\left(p_2-3\sqrt{3p_3}\right)}=4\left(12ae-3bd+c^2\right)$$

$$\sqrt{3\left(p_1+2a\left(\sqrt[3]{4\left(p_2+3\sqrt{3p_3}\right)}+\sqrt[3]{4\left(p_2-3\sqrt{3p_3}\right)}\right)\right)}\sqrt{3\left(p_1+2a\left(\omega\sqrt[3]{4\left(p_2+3\sqrt{3p_3}\right)}+\omega^2\sqrt[3]{4\left(p_2-3\sqrt{3p_3}\right)}\right)\right)}\sqrt{3\left(p_1+2a\left(\omega^2\sqrt[3]{4\left(p_2+3\sqrt{3p_3}\right)}+\omega\sqrt[3]{4\left(p_2-3\sqrt{3p_3}\right)}\right)\right)}=27\left(-8a^2d+4abc-b^3\right)$$

また、(l,m,n) は下の四組のうちいずれかの値をとるものとし、どれをとるかによって四個（重解は重複度の分数える）の解が得られる。
$(l,m,n)=(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$

（おわり）