★三次方程式の解の公式

三次方程式の解の公式を導くことは、簡単ではありません。また、得られる結果も相当に複雑なものになります。

三次方程式の一般形は次のようになります。

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad （a、b、c、d は定数、a \neq 0）$$

以下では、「カルダノの方法」と呼ばれる方法でこれを解いていきます。

まず、両辺を a で割ります。

$$x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0 \quad （A_2 = \frac{b}{a}、A_1 = \frac{c}{a}、A_0 = \frac{d}{a}）$$

次に置き換えをして、二次の係数を 0 にします。

$$y = x + \frac{A_2}{3}$$

とおくと

$$x = y - \frac{A_2}{3}$$

これを代入すると

$$\left(y - \frac{A_2}{3}\right)^3 + A_2\left(y - \frac{A_2}{3}\right)^2 + A_1\left(y - \frac{A_2}{3}\right) + A_0 = 0$$

整理して

$$y^3 + B_1 y + B_0 = 0 \quad （B_1 = -\frac{1}{3}A_2{}^2 + A_1、B_0 = \frac{2}{27}A_2{}^3 - \frac{1}{3}A_2 A_1 + A_0）$$

を得ます。さらに次のように置き換えをします。

$$\begin{cases} u + v = y \\ uv = t \end{cases}$$

t は定数で、その値は後で決定しますが、この時点では定めません。

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3(u+v)uv$$

ですから、代入して次の関係式を得ます。

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + (u+v)(3t + B_1) + B_0 = 0 \\ uv = t \end{cases}$$

ここで、

$$3t + B_1 = 0$$

を満たすように t を決めることで、上の関係式は次のように書き換えられます。

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = C_1 \\ uv = C_2 \end{cases} \quad （C_1 = -B_0、C_2 = -\frac{1}{3}B_1）$$

第２式の両辺を３乗すると、

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = C_1 \\ u^3 v^3 = {C_2}^3 \end{cases}$$

二次方程式の解と係数の関係より、u^3、v^3を解とする二次方程式をつくることができます。次のようになります。

$$z^2 + D_1 z + D_0 = 0 \quad （D_1 = -C_1、D_0 = {C_2}^3）$$

これを解くとu^3、v^3の値が分かります。解を

$$z = z_1, z_2$$

とします。uとvが入れ替わってもyおよびxは変わりませんから、二つの解のうちどちらをu^3、v^3としてもかまいません。ここでは

$$u^3 = z_1、v^3 = z_2$$

とします。立方根をとればu、vを求めることができますが、問題が発生します。z_1、z_2は二次方程式の解ですから、一般には複素数です。つまり虚数の可能性があります。u、vも実数である補償はありませんから、ここでいう立方根は複素数の範囲で考えなければなりません。複素数の範囲では、立方根は３個あります。たとえば、１の立方根は

$$1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

の３個です。この３個のうち虚数であるものの一方をωとすると、もう一方はω^2で表すことができます。以下では、このω、ω^2を用います。話を戻します。u、vが求めたかったわけですが、z_1の３個の立方根のうち、どれでもよいので、どれか一つを$\sqrt[3]{z_1}$で表すことにします。そうすると、

$$u^3 = z_1$$

より、

$$u = \sqrt[3]{z_1}, \omega\sqrt[3]{z_1}, \omega^2\sqrt[3]{z_1}$$

を得ます。同様の記号を用いて、

$$v^3 = z_2$$

より

$$v = \sqrt[3]{z_2}, \omega\sqrt[3]{z_2}, \omega^2\sqrt[3]{z_2}$$

を得ます。uの値が３個、vの値が３個得られたので、(u, v)の組は９組でてくることになりますが、このうち実際に有用なのは３組になります（$uv = C_2$から$u^3 v^3 = {C_2}^3$を導いたところで同値性がくずれてしまっています)。この９組から

$$uv = C_2$$

を満たす３組を拾い出さなければならないわけです。実際、得られた９組に対してuvの値を求めてみると

$$uv = \sqrt[3]{z_1}\sqrt[3]{z_2}, \omega\sqrt[3]{z_1}\sqrt[3]{z_2}, \omega^2\sqrt[3]{z_1}\sqrt[3]{z_2}$$

の３種類の値が得られます。この３個の値は$z_1 z_2 = {C_2}^3$の立方根の値３個に他なりませんので、このうち一個がC_3になります。簡単のために、$uv = C_3$を満たすu、vの値を$\sqrt[3]{z_1}$、$\sqrt[3]{z_2}$にとりなおしておきましょう。そうすることで、$uv = C_3$を満たすu、vの値の組は次のように表すことができます。

$$(u, v) = \left(\sqrt[3]{z_1}, \sqrt[3]{z_2}\right), \left(\omega\sqrt[3]{z_1}, \omega^2\sqrt[3]{z_2}\right), \left(\omega^2\sqrt[3]{z_1}, \omega\sqrt[3]{z_2}\right)$$

したがって、

$$y = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}, \omega\sqrt[3]{z_1} + \omega^2\sqrt[3]{z_2}, \omega^2\sqrt[3]{z_1} + \omega\sqrt[3]{z_2}$$

となり、

$$x = -\frac{A_2}{3} + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}, -\frac{A_2}{3} + \omega\sqrt[3]{z_1} + \omega^2\sqrt[3]{z_2}, -\frac{A_2}{3} + \omega^2\sqrt[3]{z_1} + \omega\sqrt[3]{z_2}$$

を得ます。これが最初の３次方程式の解です。
これで３次方程式を解くことができたわけですが、複雑ですね。
解法をまとめておきます。

第１段階

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad （a、b、c、d\text{は定数、}a \neq 0）$$

両辺をaで割って３次の係数を１とする。

$$x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0 \quad （A_2 = \frac{b}{a}、A_1 = \frac{c}{a}、A_0 = \frac{d}{a}）$$

第２段階

$$y = x + \frac{1}{3}A_2$$

と置き換えて整理する。２次の項を消去することができる。

$$y^3 + B_1 y + B_0 = 0 \quad （B_1 = -\frac{1}{3}{A_2}^2 + A_1、B_0 = \frac{2}{27}{A_2}^3 - \frac{1}{3}A_2 A_1 + A_0）$$

第３段階

$$\begin{cases} u+v=y \\ uv=-\dfrac{1}{3}B_1 \end{cases}$$

と置き換えてまとめることで

$$\begin{cases} u^3+v^3=C_1 \\ uv=C_2 \end{cases} \qquad （C_1=-B_0、C_2=-\frac{1}{3}B_1）$$

を得る。

第４段階

$$\begin{cases} u^3+v^3=C_1 \\ u^3v^3=C_2{}^3 \end{cases}$$

より、u^3、v^3 は次の二次方程式の解である。

$$z^2+D_1z+D_0=0 \qquad （D_1=-C_1、D_0=C_2{}^3）$$

第５段階

この二次方程式を解く。解を $z=z_1,z_2$ とする。

第６段階

その２解の立方根を一組求める。ただし、二つの立方根の積が C_2 になるようにする。

以下、この立方根を $\sqrt[3]{z_1}$ 、$\sqrt[3]{z_2}$ で表す。

第７段階

$$y=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2},\omega\sqrt[3]{z_1}+\omega^2\sqrt[3]{z_2},\omega^2\sqrt[3]{z_1}+\omega\sqrt[3]{z_2}$$

である。

第８段階

$$y=x+\frac{1}{3}A_2$$

より x を得る。

具体的にこの解法を適用してみましょう。

$2x^3-3x^2+3x-2=0$

を解きます。

（例１）

$2x^3-3x^2+3x-2=0$

両辺を２で割る。

$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-1=0$

$$y = x - \frac{1}{2}$$

と置く。

$$x = y + \frac{1}{2}$$

を代入して

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\left(y^3 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{8}\right) - \frac{3}{2}\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(y + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$y^3 + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2} = 0$$

ここで、

$$\begin{cases} u + v = y \\ uv = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

とする。

$$y^3 = \left(u^3 + v^3\right) + 3uv(u + v) = \left(u^3 + v^3\right) - \frac{3}{4}y$$

より

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = \dfrac{1}{2} \\ uv = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = \dfrac{1}{2} \\ u^3 v^3 = -\dfrac{1}{64} \end{cases}$$

二次方程式を解くことにより u^3 、v^3 の値を求めることができる。

$$z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{64} = 0$$

$$64z^2 - 32z - 1 = 0$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{8}$$

どちらが、u^3 、v^3 であってもよい。

$$u^3=\frac{2+\sqrt{5}}{8}、v^3=\frac{2-\sqrt{5}}{8}$$

とする。

$$\frac{2+\sqrt{5}}{8}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^3、\frac{2-\sqrt{5}}{8}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^3$$

であるから、上の関係式を満たすu、vのうち

$$uv=-\frac{1}{4}$$

を満たすのは、例えば

$$u=\frac{1+\sqrt{5}}{4}、v=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

である。全部を列挙すると

$$(u,v)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\omega,\frac{1-\sqrt{5}}{4}\omega^2\right),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\omega^2,\frac{1-\sqrt{5}}{4}\omega\right)$$

である。

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4}\omega+\frac{1-\sqrt{5}}{4}\omega^2=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}i$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4}\omega^2+\frac{1-\sqrt{5}}{4}\omega=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{4}i$$

より

$$y=\frac{1}{2},\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$$

xとyの関係式により、xを求めると

$$x=1,\frac{1\pm\sqrt{15}i}{4}$$

（注）

高校で習うように、因数定理による因数分解を利用して解くと、次のようになります。

$$2x^3-3x^2+3x-2=0$$

$f(x)=2x^3-3x^2+3x-2$とする。

$$f(1)=2-3+3-2=0$$

より$f(x)$は$x-1$で割り切れる。整式の除法を実行して

$$f(x)=(x-1)\left(2x^2-x+2\right)$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
& f(x)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-1)\left(2x^2-x+2\right)=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x-1=0 \quad \text{または} \quad 2x^2-x-2=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x=1 \quad \text{または} \quad x=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{4}
\end{aligned}
$$

この「カルダノの方法」に従えば任意の３次方程式を解くことができるわけですが、手続きはかなり複雑なものになっています。そのうえ、（例１）を見るとわかるように、途中で複素数の立方根を計算する必要が生じます。（例１）ではうまく立方根が外れましたが、この作業は一般には容易ではありませんし、実は立方根が外れない場合があります。その場合は、解を求めたとしても、立方根の中に平方根が含まれるという形（ですから、立方根の中に虚数が現れることがありうる）で解が表示されることになります。いまは、複素数の範囲で方程式を考えているわけですから、解として期待されている形は $a+bi$ （a 、b は実数） のような形なのでしょうが、それとはかけ離れたものが解として現れることになります。これで方程式が解けたといっていいものかどうか怪しいところです。

代数方程式（２次方程式、３次方程式のような方程式）の解法、あるいは、その解の公式について考える場合には、有限回の四則演算（加減乗除）とべき乗根（平方根、立方根など）を繰返し適用することで解くことができるかどうかを議論することがほとんどです。その意味では、上の解法も要求を満たしているといえます。

しかし、「解法」であっても「公式」ではないように思えます。二次方程式の解の公式と比べてみても、“代入して終わり”のような簡潔さはありません。その意味で「公式」としてここまでの「解法」をまとめてみると、次のようになります。

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a\text{、}b\text{、}c\text{、}d\text{ は定数、}a\neq 0)$$

において

$$A_2=\frac{b}{a}\text{、}A_1=\frac{c}{a}\text{、}A_0=\frac{d}{a}$$

$$B_1=-\frac{1}{3}A_2{}^2+A_1\text{、}B_0=\frac{2}{27}A_2{}^3-\frac{1}{3}A_2A_1+A_0$$

$$C_1=-B_0\text{、}C_2=-\frac{1}{3}B_1$$

$$D_1=-C_1\text{、}D_0=C_2{}^3$$

$$z_1 = \frac{-D_1 + \sqrt{{D_1}^2 - 4D_0}}{2} 、 z_2 = \frac{-D_1 - \sqrt{{D_1}^2 - 4D_0}}{2}$$

とすると

$$x = -\frac{1}{3}A_2 + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}, -\frac{1}{3}A_2 + \omega\sqrt[3]{z_1} + \omega^2\sqrt[3]{z_2}, -\frac{1}{3}A_2 + \omega^2\sqrt[3]{z_1} + \omega\sqrt[3]{z_2}$$

ただし、$\sqrt[3]{z_1}$ 、$\sqrt[3]{z_2}$ はそれぞれ z_1、z_2 の立方根で、３個ある立方根のうち

$$\sqrt[3]{z_1}\sqrt[3]{z_1} = C_2$$

を満たすもののうち一組を選ぶものとする。

これでまったく問題はないと思いますし、ほとんどの本、資料でこのような形、あるいは、これの一部を計算した形で書いてあると思います。

……

でも、「やっぱり『解の公式』というからには、もっとすっきりと“代入して終わり”という形じゃないとなぁ」と私は思っていました。今回はこれを計算して、「解の公式」を書いてみたいと思ったわけです。というわけで、計算してみました。数学的には意味は無いです。計算するだけのことです。しかも、それなり、タイヘンな、計算です…。

A_j は a,b,c,d で表されています。B_k は A_j で表されています。A_j を a,b,c,d で表した式を代入することにより、B_k を a,b,c,d で表すことができます。C_l は B_k で表されています。B_k を a,b,c,d で表した式を代入することにより、…としていくと、x を a,b,c,d で表すことができるはずです………。

結果は、次のページに書きました。横に長すぎて入らないので、A３横の用紙設定になっていますが、Adobe Reader で印刷すれば自動的に縮小してくれるはずです。その分、字は小さくなります。

３次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$　（a,b,c,d は定数、$a\neq 0$）の解は

$$x=\frac{1}{6a}\left(-2b+p\sqrt[3]{4\left(-27a^2d+9abc-2b^3+3a\sqrt{3\left(27a^2d^2-18abcd+4ac^3+4b^3d-b^2c^2\right)}\right)}+q\sqrt[3]{4\left(-27a^2d+9abc-2b^3-3a\sqrt{3\left(27a^2d^2-18abcd+4ac^3+4b^3d-b^2c^2\right)}\right)}\right)$$

ただし、根号は複素数の範囲で考え、同じ表記のものは同じ数をとるものとし、二つの立方根は次の式を満たすようにとる。

$$\sqrt[3]{4\left(-27a^2d+9abc-2b^3+3a\sqrt{3\left(27a^2d^2-18abcd+4ac^3+4b^3d-b^2c^2\right)}\right)}\sqrt[3]{4\left(-27a^2d+9abc-2b^3-3a\sqrt{3\left(27a^2d^2-18abcd+4ac^3+4b^3d-b^2c^2\right)}\right)}=4\left(b^2-3ac\right)$$

また、(p,q) は下の三組のうちいずれかの値をとるものとし、どれをとるかによって三個（重解は重複度の分数える）の解が得られる。

$(p,q)=(1,1),(\omega,\omega^2),(\omega^2,\omega)$　　ただし、$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$、$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

（おわり）