★二次方程式の解の公式

二次方程式の一般形は次のようになります。未知数はxとします。

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad （a、b、c\text{は定数、}a \neq 0）$$

これの一般解を求めるには次のようにします。

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

この結果を普通「二次方程式の解の公式」と呼びます。以下で、少し詳しく解法を見ていきましょう。

まず、両辺をaで割っています。これにより、方程式は

$$x^2 + A_1 x + A_0 = 0 \qquad （A_1 = \frac{b}{a}、A_2 = \frac{c}{a}）$$

のような形に変形できます。つまり、二次の係数が 1 の方程式を解けばよいことになります。次の変形が二次方程式の解の公式を導くための、重要な部分です。$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$という形が現れています。この変形は普通「平方完成」と呼ばれます。別の表現をすると、

$$y = x + \frac{1}{2}A_1$$

と置き換えて、

$$y^2 + B_0 = 0 \qquad （B_0 = -\frac{1}{4}A_1{}^2 + A_0 = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}）$$

という方程式を得た、ということになります。この方程式は平方根を考えることによって簡単に解くことができることになります。

$$y = \pm\sqrt{-B_0}$$

xを求めるには、次のようにすればよいでしょう。

$$x + \frac{1}{2}A_1 = \pm\sqrt{-B_0}$$

$$x = -\frac{1}{2}A_1 \pm \sqrt{-B_0}$$

まとめると、次のようになります。

第１段階

最初の式の両辺をaで割って、二次の係数が 1 である方程式を得る。

第２段階

適当な置き換えを行って、二次の係数が 1、一次の係数が 0 のyに関する方程式を得る。

第３段階

移項して平方根をとることでyを得る。

第４段階

xとyの関係式を利用してxを得る。

この方法の一部は、三次方程式の解の公式、四次方程式の解の公式を導くときにも用いられます。最後にもう一度結果を書いておきます。

$ax^2 + bx + c = 0$　（a、b、cは定数、$a \neq 0$）の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$