インデックスに戻る

３．図形と計量
３－３．図形の計量
３－３－３．空間図形の計量
３－３－３－３．球の体積

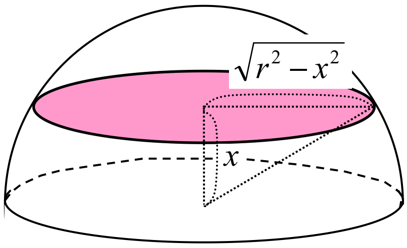
半径が r の球の体積 V は次の式で表されることが知られている。

球の体積

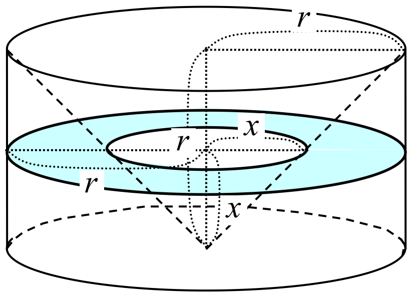
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

このことは、次のようにして説明される。

半径が r の半球 A と、底面の半径が r で高さが r の円柱が、半球の表面のうち平面である部分と円柱の下の底面が同じ面上にあるようにおかれているとする。この円柱の上の底面を底面とし高さが r の円錐を、この円柱からくりぬいた立体を B とする。円柱の下の底面と平行で高さが x の平面で A と B を切ったときの切り口を考える。



A



B

A の切り口は円である。その半径は、三平方の定理より

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$

であるから、面積は

$$\pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = \pi\left(r^2 - x^2\right)$$

である。

B の切り口は、半径が r の円から半径が x の円を除いた形である。その面積は

$$\pi r^2 - \pi x^2 = \pi\left(r^2 - x^2\right)$$

である。

よって、この2つの切り口の面積は等しく、半球Aと立体Bの体積は等しい。半径がrの球の体積をVとすると、半球Aの体積は$\frac{1}{2}V$である。また、立体Bについて、もとの円柱の体積は$\pi r^2 \cdot r$、くりぬいた円錐の体積は$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$である。よって

$$\frac{1}{2}V = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$$

$$\frac{1}{2}V = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$\frac{1}{2}V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

（例）

半径が3の球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$$

インデックスに戻る