インデックスに戻る

３．図形と計量

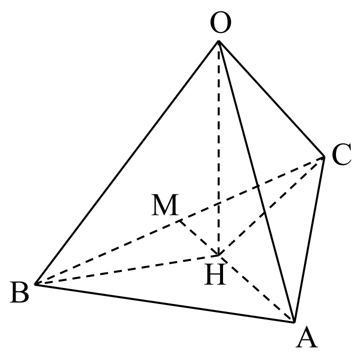
３－３．図形の計量

３－３－３．空間図形の計量

３－３－３－１．正四面体の体積

一辺の長さが a の正四面体の体積を、次のように求めることができる。

正四面体OABCの頂点Oから面ABCに下ろした垂線の足をHとする。



△OAHと△OBHと△OCHにおいて、

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}、\mathrm{OH}=\mathrm{OH}=\mathrm{OH}、\angle\mathrm{OHA}=\angle\mathrm{OHB}=\angle\mathrm{OHC}=90^\circ$$

より、

$$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}$$

である。したがって、

$$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\mathrm{CH}$$

よって、点Hは△ABCの各頂点から等距離にあるので、△ABCの外心である。△ABCは正三角形であるから、その外心と重心は一致する。よって、点Hは△ABCの重心でもある。

直線AHと直線BCの交点をMとすると、Hが△ABCの重心であることより、

$$\mathrm{BM}=\mathrm{CM}\quad\cdots①、\mathrm{AH}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}\quad\cdots②$$

①より

$$\mathrm{BM}=\frac{1}{2}a\quad\cdots③$$

△ABMにおいて、三平方の定理より

$$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BM}^2}\quad\cdots④$$

③④より

$$\mathrm{AM}=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \cdots⑤$$

②⑤より

$$\mathrm{AH}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a \quad \cdots⑥$$

△OAHにおいて、三平方の定理より

$$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2} \quad \cdots⑦$$

⑥⑦より

$$\mathrm{OH}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a \quad \cdots⑧$$

これが、正四面体OABCを底面がABCの三角錘とみなしたときの高さである。

△ABCにおいて、底辺をBCとしたときの高さはAMである。よって

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AM} \quad \cdots⑨$$

⑤⑨より

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \quad \cdots⑩$$

⑧⑩より、正四面体OABCの体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

（参考）

四面体OABCにおいて、頂点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする。

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$が成り立つとき、点Hは△ABCの外心である。

（参考）

四面体OABCにおいて、頂点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする。

$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$、$\mathrm{OB}\perp\mathrm{CA}$、$\mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$が成り立つとき、点Hは△ABCの垂心である。

インデックスに戻る