インデックスに戻る

３．図形と計量
３－３．図形の計量
３－３－２．相似な図形の面積比・体積比
３－３－２－２．立体

１つの立体を一定の割合で拡大・縮小して得られる立体は、もとの立体と相似であるという。
相似な立体では、対応する線分の長さの比は、すべて等しい。
相似な立体では、対応する角の大きさは、すべて等しい。

２つの立方体は、つねに相似である。
２つの球は、つねに相似である。
２つの正四面体は、つねに相似である。
２つの直方体は、縦・横・高さの比が異なるとき、相似ではない。
２つの円柱は、底面の半径と高さの比が異なるとき、相似ではない。

２つの相似な立体の表面積の比や体積の比について調べる。

（例１）相似な２つの角柱

相似比を$k:1$とする。
対応する面について考えるとき、これらの２つの面は相似であり、その面積比は$k^2:1$である。したがって、それぞれの角柱の面についての面積の総和である表面積の比も、$k^2:1$である。
２つの角柱の底面は、相似であり面積比は$k^2:1$である。高さの比は$k:1$である。したがって、底面積と高さの積である体積の比は、$k^3:1$である。

（例２）２つの立方体

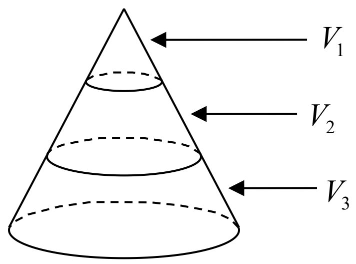
立方体Aの一辺をaとし、立方体Bの一辺をbとする。立方体Aの表面積は、一辺がaである正方形の面積の６倍であるから、$6a^2$である。立方体aの体積はa^3である。同様に、立方体bの表面積は$6b^2$、体積はb^3である。
したがって、立方体Aと立方体Bの表面積の比は$a^2:b^2$、体積の比は$a^3:b^3$である。

角柱や立方体に限らず、２つの相似な立体について、次のことが成り立つ。

> 相似な立体の表面積の比と、体積の比
>
> 相似比が$k:1$ならば表面積の比は$k^2:1$、体積の比は$k^3:1$
>
> 相似比が$a:b$ならば表面積の比は$a^2:b^2$、体積の比は$a^3:b^3$

（例題）

円錐Cを、高さの３等分点を通り底面に平行な平面で切って、３つの立体に分ける。これらの立体の体積を頂点に近いほうから、V_1、V_2、V_3とする。体積の比$V_1:V_2:V_3$を求めよ。



（解答）

高さの３等分点のうちで円錐の頂点に近いほうの点を通り、底面に平行な平面をαとする。また、高さの３等分点のうちで円錐の頂点から遠いほうの点を通り、底面に平行な平面をβとする。円錐Cをαで切ってできる２つの立体のうち、円錐であるほうをC_1とする。また、円錐Cを平面βで切ってできる２つの立体のうち、円錐であるほうをC_2とする。

C_1とC_2とCは相似であり相似比は$1:2:3$であるから、体積比は$1^3:2^3:3^3=1:8:27$である。したがって、

$$V_1:(V_1+V_2):(V_1+V_2+V_3)=1:8:27$$

よって、kを実数として、次のように表すことができる。

$V_1=k$　…①、$V_1+V_2=8k$　…②、$V_1+V_2+V_3=27k$　…③

②－①より

$$V_2=7k$$

③－②より

$$V_3=19k$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}&V_1:V_2:V_3\\&=k:7k:19k\\&=1:7:19\end{aligned}$$

インデックスに戻る