インデックスに戻る

３．図形と計量

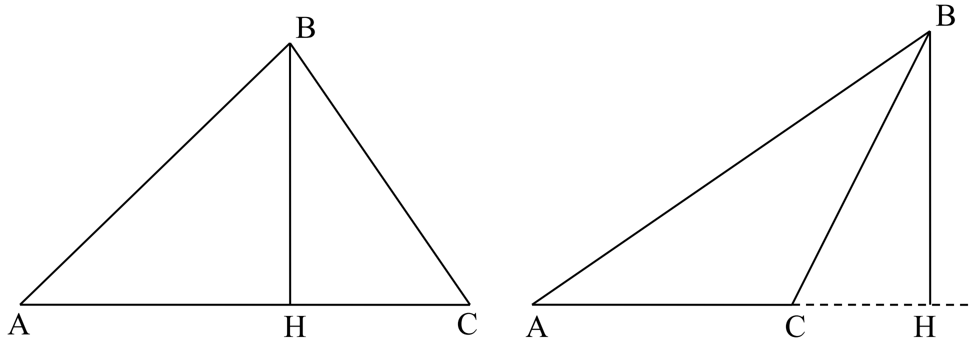
３－３．図形の計量

３－３－１．三角形の面積

３－３－１－１．正弦を用いた面積の公式

三角形の面積を、内角の正弦を用いて表すことができる。

（ｉ） $\angle A$ が鋭角の場合



頂点 B から直線 AC に下ろした垂線の足を H とする。三角形 ABH は $\angle H = 90°$ の直角三角形だから、

$$\frac{BH}{AB} = \sin \angle A$$

$$BH = AB \sin \angle A$$

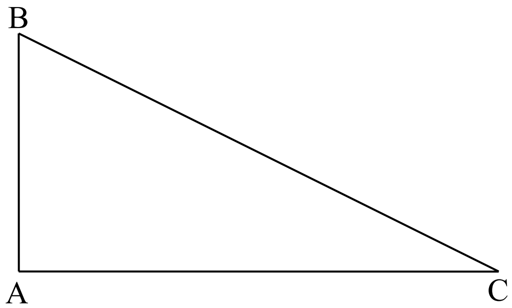
したがって、三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} AC \cdot BH$$

$$= \frac{1}{2} AC \left(AB \sin \angle A \right)$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle A$$

（iii）　$\angle\mathrm{A}$ が直角の場合



三角形 ABC の面積を S とする。AC を底辺とみると、AB が高さである。よって

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$$

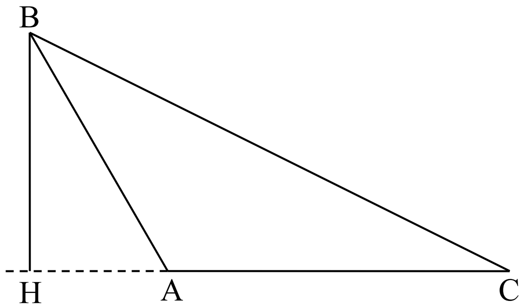
$\angle\mathrm{A}$ が直角だから

$$\sin\angle\mathrm{A}=1$$

よって、

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{A}$$

（ii）　$\angle\mathrm{A}$ が鈍角の場合



頂点 B から直線 AC に下ろした垂線の足を H とする。三角形 ABH は $\angle\mathrm{H}=90^\circ$ の直角三角形だから、

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}=\sin\angle\mathrm{BAH}$$

$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAH}$$

したがって、三角形ABCの面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BH}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AC}(\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAH})$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin(180^\circ-\angle\mathrm{A})$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{A}$$

$\angle\mathrm{B}$、$\angle\mathrm{C}$に着目しても同様である。まとめると、次のようになる。

三角形の面積と正弦

三角形ABCにおいて、$\mathrm{BC}=a$、$\mathrm{CA}=b$、$\mathrm{AB}=c$とする。三角形ABCの面積をSとすると、Sは次の式で表される。

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\angle\mathrm{A}=\frac{1}{2}ca\sin\angle\mathrm{B}=\frac{1}{2}ab\sin\angle\mathrm{C}$$

（例）

$\mathrm{AB}=4$、$\mathrm{AC}=3$、$\angle\mathrm{A}=60^\circ$の三角形ABCの面積を$S$とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\sin60^\circ=3\sqrt{3}$$

インデックスに戻る