インデックスに戻る

３．図形と計量

３－２．正弦定理と余弦定理

３－２－３．正弦定理・余弦定理の応用

３－２－３－１．辺と角

正弦定理・余弦定理を用いると、三角形の辺や角についての条件から、他の辺や角を求められることがある。

（例題１）

三角形 ABC において、$\angle A = 120°$、$CA = 2$、$AB = \sqrt{3} - 1$ であるとする。残りの辺の長さ、角の大きさを求めよ。

（解答）

余弦定理より、

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB\cos\angle A$$

よって

$$\begin{aligned} &BC^2 \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 - 2 \cdot 2\left(\sqrt{3} - 1\right)\cos 120° \\ &= 4 + \left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \left(2\sqrt{3} - 2\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$BC > 0$ より

$$BC = \sqrt{6}$$

正弦定理より、

$$\frac{CA}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A}$$

よって

$$\begin{aligned} &\sin\angle B \\ &= \frac{CA}{BC}\sin\angle A \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

よって

$\angle B = 45°, 135°$

内角の和は$180°$であることと、$\angle A = 120°$であることより、

$\angle B < 60°$

よって

$\angle B = 45°$

内角の和が$180°$であることより

$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 120° - 45° = 15°$

以上より

$BC = \sqrt{6}$、$\angle B = 45°$、$\angle C = 15°$

（例題２）

$\sin\angle A : \sin\angle B : \sin\angle C = 6 : 7 : 8$のとき、$\cos\angle A$の値を求めよ。

（解答）

正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{CA}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle C} = 2R$$

よって

$BC = 2R\sin\angle A$、$CA = 2R\sin\angle B$、$AB = 2R\sin\angle C$

ゆえに

$$\begin{aligned} &BC : CA : AB \\ &= 2R\sin\angle A : 2R\sin\angle B : 2R\sin\angle C \\ &= \sin\angle A : \sin\angle B : \sin\angle C \\ &= 6 : 7 : 8 \end{aligned}$$

よって、正の数kを用いて

$BC = 6k$、$CA = 7k$、$AB = 8k$

と表すことができる。余弦定理より

$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB\cos\angle A$

よって

$$
\begin{aligned}
&\cos\angle \mathrm{A} \\
&=\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} \\
&=\frac{(7k)^2+(8k)^2-(6k)^2}{2\cdot 7k\cdot 8k} \\
&=\frac{49k^2+64k^2-36k^2}{112k^2} \\
&=\frac{77k^2}{112k^2} \\
&=\frac{11}{16}
\end{aligned}
$$

インデックスに戻る