

[インデックスに戻る](#)

3. 図形と計量

3-2. 正弦定理と余弦定理

3-2-2. 余弦定理

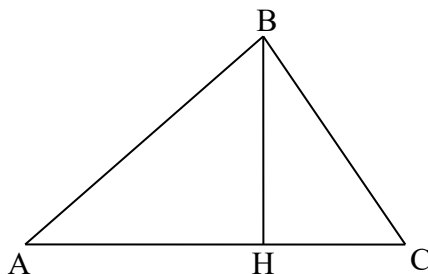
3-2-2-1. 余弦定理の証明

(i) $\angle A$ が鋭角の場合

三角形 ABC は $\angle A$ が鋭角の三角形であるとする。また、 $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$ 、 $\angle A = A$ 、 $\angle B = B$ 、 $\angle C = C$ とする。

点 B から直線 AC に下ろした垂線の足を H とする。

(ア) 点 H が線分 AC 上にある場合



三角形 ABH において、三角比の定義より

$$\frac{BH}{AB} = \sin A, \quad \frac{AH}{AB} = \cos A$$

$$BH = c \sin A \quad \cdots \textcircled{1}, \quad AH = c \cos A \quad \cdots \textcircled{2}$$

$CH = AC - AH$ と $\textcircled{2}$ より

$$CH = b - c \cos A \quad \cdots \textcircled{3}$$

三角形 BCH において、三平方の定理より

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}\textcircled{3}\textcircled{4}$ より

$$a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2$$

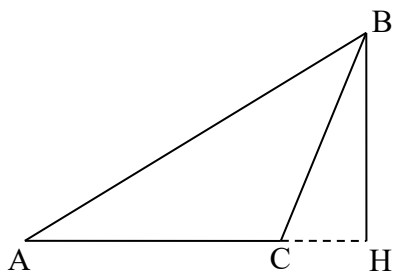
$$a^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A$$

$$a^2 = b^2 + (\sin^2 A + \cos^2 A)c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

以下では、この関係式が、 $\angle A$ が鋭角で H が線分 AC の C の側への延長上にある場合や、 $\angle A$ が直角・鈍角である場合にも、成り立つことを示す。

(イ) 点Hが線分ACのCの側への延長上にある場合



三角形ABHにおいて、三角比の定義より

$$\frac{BH}{AB} = \sin A, \quad \frac{AH}{AB} = \cos A$$

$$BH = c \sin A \quad \cdots \textcircled{5}, \quad AH = c \cos A \quad \cdots \textcircled{6}$$

CH = AH - AC と⑥より

$$CH = c \cos A - b \quad \cdots \textcircled{7}$$

三角形BCHにおいて、三平方の定理より

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑤⑦⑧より

$$a^2 = (c \sin A)^2 + (c \cos A - b)^2$$

$$a^2 = c^2 \sin^2 A + c^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + b^2$$

$$a^2 = b^2 + (\sin^2 A + \cos^2 A)c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

(ii) $\angle A$ が直角の場合

三平方の定理より

$$a^2 = b^2 + c^2$$

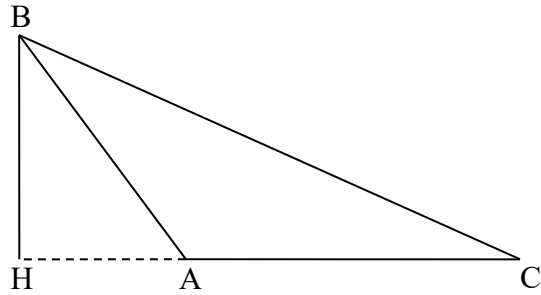
$\angle A$ が直角より

$$\cos A = 0$$

よって

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

(iii) $\angle A$ が鈍角の場合



三角形 ABH において、三角比の定義より

$$\frac{BH}{AB} = \sin \angle BAH, \quad \frac{AH}{AB} = \cos \angle BAH$$

$$BH = c \sin \angle BAH, \quad AH = c \cos \angle BAH$$

これと $\angle BAH + A = 180^\circ$ より

$$BH = c \sin(180^\circ - A) \quad \cdots \textcircled{9}, \quad AH = c \cos(180^\circ - A) \quad \cdots \textcircled{10}$$

$CH = AH + AC$ と $\textcircled{10}$ より

$$CH = c \cos(180^\circ - A) + b \quad \cdots \textcircled{11}$$

三角形 BCH において、三平方の定理より

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \quad \cdots \textcircled{12}$$

$\textcircled{9} \textcircled{11} \textcircled{12}$ より

$$a^2 = \{c \sin(180^\circ - A)\}^2 + \{c \cos(180^\circ - A) + b\}^2$$

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ 、 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ より

$$a^2 = (c \sin A)^2 + (-c \cos A + b)^2$$

$$a^2 = c^2 \sin^2 A + c^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + b^2$$

$$a^2 = b^2 + (\sin^2 A + \cos^2 A)c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

したがって、いずれの場合も、関係式 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ が成り立つことがわかる。これを余弦定理という。 B や C についても同様の関係式が成り立つ。

余弦定理

三角形 ABC において、 $BC = a$ 、 $CA = b$ 、 $AB = c$ 、 $\angle A = A$ 、 $\angle B = B$ 、 $\angle C = C$ とすると、次の関係式が成り立つ。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

[インデックスに戻る](#)