インデックスに戻る

３．図形と計量

３－２．正弦定理と余弦定理

３－２－１．正弦定理

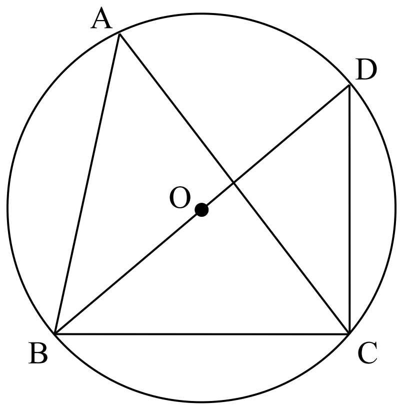
３－２－１－１．正弦定理の証明

三角形の３つの頂点を通る円は、ただ１つに定まる。これを、その三角形の外接円という。

三角形 ABC において、その外接円の中心を O、半径を R とする。$\mathrm{BC}=a$、$\mathrm{CA}=b$、$\mathrm{AB}=c$ とする。

まず、∠A が鋭角の場合を考える。

（ｉ）　∠A が鋭角の場合



直線 BO と円 O の交点のうち、点 B と異なるものを D とする。すなわち BD は円 O の直径であり、

$$\mathrm{BD}=2R \quad \cdots①$$

である。円周角の定理より、

$$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{A} \quad \cdots②、\ \angle\mathrm{BCD}=90^\circ \quad \cdots③$$

③より、三角形 BCD は BD が斜辺の直角三角形であるから、三角比の定義より、

$$\sin\angle\mathrm{BDC}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} \quad \cdots④$$

①②④より

$$\sin\angle\mathrm{A}=\frac{a}{2R}$$

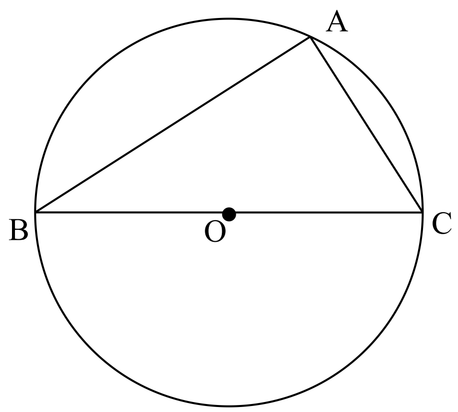
$$2R\sin\angle\mathrm{A}=a$$

$\sin\angle\mathrm{A}>0$ より

$$2R=\frac{a}{\sin\angle\mathrm{A}} \quad \cdots⑤$$

∠A が直角や鈍角の場合にも、この関係式が成り立つことを示す。

（ⅱ）　∠A が直角の場合



∠A が直角であるから、円周角の定理より、辺 BC は外接円 O の直径である。したがって

$a = 2R$　…⑥

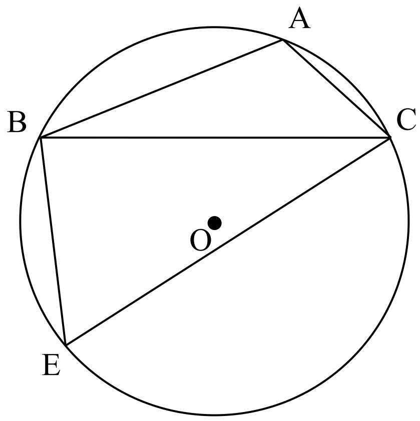
∠A は直角だから、

$\sin \angle \mathrm{A} = 1$　…⑦

⑥⑦より

$$2R = \frac{a}{\sin \angle \mathrm{A}}$$

（ⅲ）　$\angle \mathrm{A}$ が鈍角の場合



直線 BC に関して A と反対側にある点で、外接円 O の周上にある点を E とする。円に内接する四角形の対角の和は $180°$ であるから、

$$\angle \mathrm{BEC} = 180° - \angle \mathrm{A} \quad \cdots ⑧$$

$\angle \mathrm{A}$ が鈍角であるから、⑧より $\angle \mathrm{BEC}$ は鋭角である。したがって、（ｉ）より（三角形 BEC について、その外接円は円 O であり、半径は R であるから）

$$2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin \angle \mathrm{BEC}} \quad \cdots ⑨$$

⑧⑨より

$$2R = \frac{a}{\sin(180° - \angle \mathrm{A})}$$

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$ であったから

$$2R = \frac{a}{\sin \angle \mathrm{A}}$$

（ｉ）（ⅱ）（ⅲ）より、三角形 ABC について、どのような場合でも

$$2R = \frac{a}{\sin \angle \mathrm{A}}$$

が成り立つ。$\angle \mathrm{B}$、$\angle \mathrm{C}$ についても、同様に

$$2R = \frac{b}{\sin \angle \mathrm{B}}、\ 2R = \frac{c}{\sin \angle \mathrm{C}}$$

が成り立つから、

$$\frac{a}{\sin \angle \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \angle \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \angle \mathrm{C}} = 2R$$

がいえる。これを正弦定理という。

正弦定理

三角形ABCにおいて、$\mathrm{BC}=a$、$\mathrm{CA}=b$、$\mathrm{AB}=c$、$\angle\mathrm{A}=A$、$\angle\mathrm{B}=B$、$\angle\mathrm{C}=C$とし、外接円の半径をRとすると、

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

インデックスに戻る