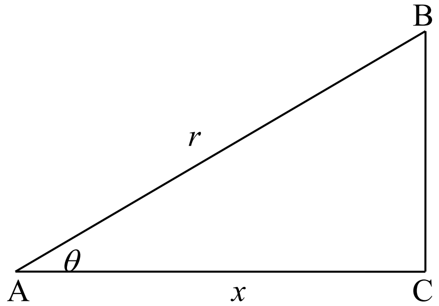
インデックスに戻る

３．図形と計量
３－１．三角比
３－１－２．三角比の性質
３－１－２－１．三角比の相互関係

$(\sin\theta)^2$、$(\cos\theta)^2$、$(\tan\theta)^2$ を、それぞれ、$\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$、$\tan^2\theta$ と書く。



$\angle C = 90°$ の直角三角形ABCにおいて、$\angle A$ の大きさを θ とする。$AB = r$、$CA = x$、$BC = y$ とすれば、三角比の定義より、

$$\sin\theta = \frac{y}{r}、\cos\theta = \frac{x}{r}、\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cdots①$$

が成り立つ。

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を計算すると次のようになる。

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\theta \quad \cdots②$$

また、①より

$$x = r\cos\theta、y = r\sin\theta$$

であるが、三平方の定理より

$$x^2 + y^2 = r^2$$

が成り立つから、

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2$$

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$$

$r > 0$ より $r^2 > 0$ であるから、この等式の両辺を r^2 で割ると

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \cdots③$$

さらに、この両辺を$\cos^2\theta$で割ると

$$1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

これと②より

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

以上より、次の関係式が成り立つ。

三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

三角比の相互関係を利用して、３つの三角比$\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$の１つの値から、他の２つの値を求めることができる。

（例題１）

θを鋭角とする。$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$のとき、$\cos\theta$、$\tan\theta$の値を求めよ。

（解答）

$$\sin\theta = \frac{4}{5} \quad \cdots ①$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$より

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

$\cos\theta > 0$であるから、

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \quad \cdots ②$$

①②と$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$より

$$\tan\theta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

（注）

鋭角（$0°$ より大きく $90°$ より小さい角）の三角比は常に正である。

（注）

$$\frac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}=\frac{d}{c}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ad}{bc}$$

（例題２）

θ を鋭角とする。$\tan\theta=3$ のとき、$\cos\theta$、$\sin\theta$ の値を求めよ。

（解答）

$$\tan\theta=3 \quad \cdots①$$

①と $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$1+3^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{10}$$

$\cos\theta>0$ であるから、

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \cdots②$$

①②と $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\cos\theta\tan\theta=\sin\theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot3=\sin\theta$$

$$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

インデックスに戻る