

[インデックスに戻る](#)

9. 図形と方程式

9-3. 軌跡と領域

9-3-1. 軌跡と方程式

9-3-1-1. 条件と軌跡

ある条件を満たしながら点が動くときにできる図形を、その条件を満たす点の軌跡という。ある条件を満たす点の集合として定まる図形といってもよい。

(例)

$A(-1,0)$ 、 $B(2,3)$ とする。条件

$$BP^2 - AP^2 = 6 \quad \cdots (*)$$

を満たす点 P の軌跡を考える。

$P(x, y)$ とすると

$$AP^2 = (x+1)^2 + y^2$$

$$BP^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$$

であるから、条件 (*) は、 x 、 y を用いて次のように表される。

$$\{(x-2)^2 + (y-3)^2\} - \{(x+1)^2 + y^2\} = 6$$

$$(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) - (x^2 + 2x + 1 + y^2) = 6$$

$$-6x - 6y + 6 = 0$$

$$x + y - 1 = 0$$

よって、(*) を満たす点 P は直線 $x + y - 1 = 0$ 上を動く。

逆に、点 P が直線 $x + y - 1 = 0$ 上を動くとき

$$x + y - 1 = 0$$

が成り立つから、上の式変形を逆にたどると

$$-6x - 6y + 6 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) - (x^2 + 2x + 1 + y^2) = 6$$

$$\{(x-2)^2 + (y-3)^2\} - \{(x+1)^2 + y^2\} = 6$$

を得る。よって、条件 (*) は成り立っている。

以上より、条件 (*) を満たす点 P の軌跡は直線 $x + y - 1 = 0$ である。

一般にある条件 $C(P)$ を満たす点 P の軌跡が図形 F であることを示すには、次の2つのことがいえればよい。

- i. 条件 $C(P)$ を満たす点 P は、図形 F 上にある。
- ii. 図形 F 上にある点 P は、条件 $C(P)$ を満たす。

条件やその条件を満たす点の軌跡が単純である場合には、次のようにすると、座標を用いて軌跡を求めることができる。以下では、条件 $C(P)$ を満たす点 P の軌跡が F であるとし、その図形 F が方程式 E で表されたとする。

- i.
 - 条件 C を満たす点 P の座標を (x, y) とする。 P に関する条件を x, y の方程式で表し、その方程式を整理していく。整理された方程式 E の表す図形 F が何であるかを調べる。
- ii.
 - i で求めた図形 F 上の任意の点 P を (x, y) とすると、 x, y はその図形の方程式 E を満たす。その $P(x, y)$ は元の条件 $C(P)$ を満たすことを確かめる。

(例)

座標平面上において、 $O(0,0)$ 、 $A(3,0)$ とする。 O からの距離と A からの距離の比が $1:2$ であるような点 P の軌跡を求める。

$P(x,y)$ とする。

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}、AP = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

であるから、条件「 O からの距離と A からの距離の比が $1:2$ である」、すなわち「 $OP:AP=1:2$ 」は、 x 、 y を用いて

$$\sqrt{x^2 + y^2} : \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 1:2$$

と表すことができる。これを整理すると

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$-3x^2 - 3y^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 2^2$$

この方程式は、点 $(-1,0)$ を中心とする半径 2 の円を表す。逆に

$$(x+1)^2 + y^2 = 2^2$$

が成り立つとき、

$$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

$$-3x^2 - 3y^2 - 6x + 9 = 0$$

… (のように、上の計算を逆たどって) …

$$\sqrt{x^2 + y^2} : \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 1:2$$

$OP:AP=1:2$ が成り立つ。

したがって、求める軌跡は点 $(-1,0)$ を中心とする半径 2 の円である。

(注)

とで囲んだ部分が明らかな場合には、それを省略することがある。

[インデックスに戻る](#)