インデックスに戻る

９．図形と方程式
９－１．点と直線
９－１－４．平行・垂直条件とその応用
９－１－４－３．点と直線の距離

直線lと、l上にない点Aを考える。Aを通りlに垂直な直線とlの交点を、点Aから直線lに下ろした垂線の足という。これをHとするとき、線分AHを点Aから直線lに下ろした垂線という。線分AHの長さを、点Aから直線lに下ろした垂線の長さ、または、点Aと直線lの距離という。

座標平面の原点Oと直線l：$ax+by+c=0$　（$c \neq 0$）との距離について考える。
方程式$bx-ay=0$で表される直線をnとする。

$a=0$のとき、

lの方程式は

$$y=-\frac{c}{b}$$

であり、lはx軸に平行である。nの方程式は

$$x=0$$

であり、nはy軸に平行である。よって、lとnは垂直である。

$b=0$のとき、

lの方程式は

$$x=-\frac{c}{a}$$

であり、lはy軸に平行である。nの方程式は

$$y=0$$

であり、nはx軸に平行である。よって、lとnは垂直である。

$a \neq 0$かつ$b \neq 0$のとき、lの方程式は

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

であり、nの方程式は

$$y=\frac{b}{a}x$$

である。この2直線の傾きの積を計算すると

$$-\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=-1$$

であるから、lとnは垂直である。

以上より、l と n はどの場合も垂直である。この 2 直線の交点を H とすると、点 O から l に下ろした垂線の足は H である。次の連立方程式を解くことにより、H の座標を求めることができる。

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx-ay=0 \end{cases}$$

この連立方程式の解は

$$x=-\frac{ac}{a^2+b^2}、\ y=-\frac{bc}{a^2+b^2}$$

であるから、H の座標は

$$\mathrm{H}\left(-\frac{ac}{a^2+b^2},-\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$$

である。線分 OH の長さが、原点 O と直線 l との距離であった。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{OH}^2 \\
&=\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(-\frac{bc}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&=\frac{a^2c^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}+\frac{b^2c^2}{\left(a^2+b^2\right)^2} \\
&=\frac{a^2c^2+b^2c^2}{\left(a^2+b^2\right)^2} \\
&=\frac{\left(a^2+b^2\right)c^2}{\left(a^2+b^2\right)^2} \\
&=\frac{c^2}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\mathrm{OH}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

これが、原点 O と直線 l ： $ax+by+c=0$ との距離である。

次に、点 P (x_1, y_1) と直線 l ： $ax+by+c=0$ 　…①　との距離を d とする。方程式

$$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0 \quad \cdots②$$

で表される直線を m とする。直線 l 上の点を $\mathrm{Q}(s,t)$ とすると、

$$as+bt+c=0 \quad \cdots③$$

が成り立つ。点Qを x 軸方向に $-x_1$、y 軸方向に $-y_1$ だけ平行移動して得られる点をRとすると

$$\mathrm{R}(s-x_1, t-y_1)$$

である。これを②の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} & a\{(s-x_1)+x_1\}+b\{(t-y_1)+y_1\}+c \\ &= as+bt+c \\ &= 0 \quad (\because \ ③) \end{aligned}$$

であるから、Rは直線 m 上の点である。すなわち、直線 l を x 軸方向に $-x_1$、y 軸方向に $-y_1$ だけ平行移動して得られる直線が m である。点Pは同じ平行移動によって原点Oに移るから、点Pと直線 l の距離 d は、原点Oと直線 m の距離に等しい。②を整理すると、

$$ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$$

となるから、

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である。

点と直線との距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ との距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

（例）

点 $(2,1)$ と直線 $3x+4y+5=0$ との距離は

$$\frac{|3\cdot2+4\cdot1+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|15|}{5}=\frac{15}{5}=3$$

インデックスに戻る