インデックスに戻る

９．図形と方程式

９－１．点と直線

９－１－４．平行・垂直条件とその応用

９－１－４－１．２直線の平行と垂直

（例）

2 直線 $y = 3x$ と $y = 3x + 1$ の傾きは等しい。この 2 直線は平行といってよいであろう。一般に、2 直線 l_1 ： $y = m_1 x + k_1$ と l_2 ： $y = m_2 x + k_2$ が平行であるための条件は $m_1 = m_2$ である。

（証明）

l_1 上の 2 点

$\mathrm{A}_1(0, k_1)$、$\mathrm{B}_1(1, m_1 + k_1)$

に対し、

$\mathrm{C}_1(1, k_1)$

とする。l_2 上の 2 点

$\mathrm{A}_2(0, k_2)$、$\mathrm{B}_2(1, m_2 + k_2)$

に対し、

$\mathrm{C}_2(1, k_2)$

とする。

$m_1 = m_2$

ならば

$\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1 = \mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$

これと

$\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1 = \mathrm{A}_2\mathrm{C}_2$、$\angle \mathrm{A}_1\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1 = \angle \mathrm{A}_2\mathrm{C}_2\mathrm{B}_2$

より、$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1 \equiv \triangle \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ であるから、

$\angle \mathrm{C}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 = \angle \mathrm{C}_2\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$

さらに、$\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1 // \mathrm{A}_2\mathrm{C}_2$ であるから

$l_1 // l_2$

逆に、$l_1 // l_2$ ならば、$\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1 // \mathrm{A}_2\mathrm{C}_2$ であるから

$\angle \mathrm{C}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 = \angle \mathrm{C}_2\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$

である。これと

$\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1 = \mathrm{A}_2\mathrm{C}_2$、$\angle \mathrm{A}_1\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1 = \angle \mathrm{A}_2\mathrm{C}_2\mathrm{B}_2$

より、$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1 \equiv \triangle \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ であるから、

$\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1 = \mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$

よって、（$l_1 // l_2$ より m_1 と m_2 は同符号であるから）

$m_1 = m_2$

（例）

2 直線 l_1 ： $y=3x-2$ 、l_2 ： $y=-\dfrac{1}{3}x+8$ について考える。点 $\mathrm{A}(3,7)$ は両方の直線上にある。l_1 上に点 $\mathrm{B_1}(4,10)$、l_2 上に点 $\mathrm{B_2}(6,6)$ をとり、$\mathrm{C_1}(4,7)$、$\mathrm{C_2}(6,7)$ とすると、$\triangle\mathrm{AB_1C_1}$ と $\triangle\mathrm{B_2AC_2}$ は合同である。したがって、$\angle\mathrm{B_1AB_2}=90^\circ$、すなわち l_1 と l_2 は垂直である。

一般に、2 直線 l_1 ： $y=m_1x+k_1$ と l_2 ： $y=m_2x+k_2$ が垂直であるための条件は $m_1m_2=-1$ である。

（証明）

平行移動しても 2 直線のなす角は変わらないから、$k_1=k_2=0$ の場合を考えればよい。以下、この条件の下で考える。すなわち、

l_1 ： $y=m_1x$ 、l_2 ： $y=m_2x$

である。原点 O は l_1 上にもあり、l_2 上にもある。l_1 上に点 $\mathrm{B_1}(1,m_1)$、l_2 上に点 $\mathrm{B_2}\left(\dfrac{1}{m_2},1\right)$ をとる。さらに、$\mathrm{C_1}(1,0)$、$\mathrm{C_2}\left(\dfrac{1}{m_2},0\right)$ とする。

$m_1m_2=-1$ ならば

$$m_1=-\frac{1}{m_2}$$

であるから、

$$\mathrm{B_1C_1}=\mathrm{OC_2}$$

これと、

$$\mathrm{OC_1}=\mathrm{B_2C_2}、\angle\mathrm{OC_1B_1}=\angle\mathrm{B_2C_2O}=90^\circ$$

より、$\triangle\mathrm{OB_1C_1}\equiv\triangle\mathrm{B_2OC_2}$ である。よって

$$\angle\mathrm{C_1OB_1}=\angle\mathrm{C_2B_2O}\quad\cdots①$$

三角形 $\mathrm{OB_2C_2}$ において、内角の和を考えて

$$\angle\mathrm{C_2B_2O}+\angle\mathrm{C_2OB_2}=90^\circ\quad\cdots②$$

①②より

$$\angle\mathrm{C_1OB_1}+\angle\mathrm{C_2OB_2}=90^\circ$$

よって、$\angle\mathrm{B_2OB_1}=90^\circ$、すなわち

$$l_1\perp l_2$$

が成り立つ。

逆に、$l_1\perp l_2$ ならば

$$\angle\mathrm{C_1OB_1}+\angle\mathrm{C_2OB_2}=90^\circ\quad\cdots③$$

三角形 $\mathrm{OB_2C_2}$ において、内角の和を考えて

$$\angle\mathrm{C_2B_2O}+\angle\mathrm{C_2OB_2}=90^\circ\quad\cdots④$$

③④より

$$\angle C_1OB_1 = \angle C_2B_2O$$

これと、

$$OC_1 = B_2C_2、\angle OC_1B_1 = \angle B_2C_2O = 90°$$

より、$\triangle OB_1C_1 \equiv \triangle B_2OC_2$ であるから

$$B_1C_1 = OC_2$$

よって（$l_1 \perp l_2$ より m_1 と m_2 は異符号であるから）

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$m_1m_2 = -1$$

2直線の平行条件・垂直条件

異なる2直線 l_1 ： $y = m_1x + k_1$ と l_2 ： $y = m_2x + k_2$ について

$$l_1 // l_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$$

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1m_2 = -1$$

（例）

l ： $y = 2x + 1$ について、l に平行で点 $(4,3)$ を通る直線の方程式は

$$y - 3 = 2(x - 4)$$

$$y - 3 = 2x - 8$$

$$y = 2x - 5$$

l に垂直で点 $(4,3)$ を通る直線の方程式は

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

インデックスに戻る