

[インデックスに戻る](#)

15. 数列

15-3. 漸化式と数学的帰納法

15-3-2. 数学的帰納法

15-3-2-4. 整数の性質の証明

数学的帰納法を用いて、整数の性質を証明してみよう。

(例)

すべての自然数 n について、

$$5^n - 2^n \text{ は } 3 \text{ の倍数である} \quad \cdots \textcircled{1}$$

ことを、数学的帰納法で証明してみよう。

(1)

$n=1$ のとき、 $5^n - 2^n = 5 - 2 = 3$ であるから、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(2)

$n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定する。すなわち、 N を整数として

$$5^k - 2^k = 3N$$

と表すことができる。

$$5^k = 3N + 2^k$$

これを用いると

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 2^{k+1} &= 5 \times 5^k - 2 \times 2^k \\ &= 5(3N + 2^k) - 2 \times 2^k \\ &= 15N + 5 \times 2^k - 2 \times 2^k \\ &= 15N + 3 \times 2^k \\ &= 3(5N + 2^k) \end{aligned}$$

N は整数であるから、 $5N + 2^k$ も整数であり、 $5^{k+1} - 2^{k+1}$ は 3 の倍数である。よって、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(1) (2) から、すべての自然数 n について、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[インデックスに戻る](#)