インデックスに戻る

１５． 数列

１５－３．漸化式と数学的帰納法

１５－３－２．数学的帰納法

１５－３－２－３．不等式の証明

数学的帰納法を用いて不等式の証明をしてみよう。

（例）

n を 4 以上の自然数とする。

$$2^n > n^2 - 1 \quad \cdots ①$$

が成り立つことを、数学的帰納法で示してみよう。

（１）

$n=4$ のとき①の左辺は $2^4=16$、右辺は $4^2-1=15$ であるから、$n=4$ のとき①は成り立つ。

（２）

k を 4 以上の自然数とする。$n=k$ のとき①が成り立つと仮定する。すなわち

$$2^k > k^2 - 1 \quad \cdots ②$$

②の両辺を 2 倍して

$$2^{k+1} > 2\left(k^2-1\right) \quad \cdots ③$$

ここで、不等式

$$2\left(k^2-1\right) > (k+1)^2 - 1 \quad \cdots ④$$

を示す。

$$2\left(k^2-1\right) - \left\{(k+1)^2-1\right\} = \left(2k^2-2\right) - \left(k^2+2k\right) = k^2-2k-2$$

$$= (k-1)^2 - 3 > (4-1)^2 - 3 = 9 - 3 = 6 > 0$$

よって、④は示された。③④より

$$2^{k+1} > (k+1)^2 - 1$$

よって、$n=k+1$ のときも①が成り立つ。

（１）（２）から 4 以上のすべての自然数 n について①が成り立つ。

インデックスに戻る