

[インデックスに戻る](#)

## 1 5. 数列

### 1 5-3. 漸化式と数学的帰納法

#### 1 5-3-1. 漸化式

#### 1 5-3-1-3. 等比数列と定数の和

(例)

次の関係式を満たす数列  $\{a_n\}$  を考える。

$$a_1 = 2 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad \cdots \textcircled{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

方程式

$$x = 2x - 1$$

を解くと

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

この解はもとの方程式を満たすので

$$1 = 2 \times 1 - 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

②-③より

$$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$$

ここで、

$$b_n = a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により、数列  $\{b_n\}$  を定めると

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 2b_n$$

よって、数列  $\{b_n\}$  は初項 1、公比 2 の等比数列である。 $\{b_n\}$  の一般項は

$$b_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

であるから、 $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = b_n + 1 = 2^{n-1} + 1$$

である。

一般に、 $p$ 、 $q$ を定数とし、 $p \neq 1$ 、 $q \neq 0$ のとき、漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q \quad \cdots \textcircled{1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ について、方程式

$$x = px + q$$

の解を $c$ とすれば

$$c = pc + q \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①②より

$$a_{n+1} - c = p(a_n - c)$$

であるから、数列 $\{a_n - c\}$ は公比 $p$ の等比数列であり

$$a_n - c = p^{n-1}(a_1 - c)$$

$$a_n = p^{n-1}(a_1 - c) + c$$

が成り立つ。この $\{a_n\}$ の一般項は公比 $p$ の等比数列と定数 $c$ の和である。

(例)

次の関係式を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

与えられた漸化式を変形して

$$a_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(a_n + 2)$$

さらに

$$a_1 + 2 = 2$$

であるから、数列 $\{a_n + 2\}$ は初項2、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。よって

$$a_n + 2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{n-2}} - 2$$

[インデックスに戻る](#)