インデックスに戻る

１５． 数列

１５－３．漸化式と数学的帰納法

１５－３－1．漸化式

１５－３－１－２．漸化式と一般項

d を定数とする。次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}$ は d を公差とする等差数列である。

$a_{n+1} = a_n + d$ （$n = 1,2,3,\cdots$）

r を定数とする。次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}$ は r を公比とする等比数列である。

$a_{n+1} = ra_n$ （$n = 1,2,3,\cdots$）

（例）

次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

$a_1 = 1$、$a_{n+1} = a_n + 2$ （$n = 1,2,3,\cdots$）

$\{a_n\}$ は初項 1、公差 2 の等差数列である。よって、その一般項は

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

（例）

次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

$a_1 = 2$、$a_{n+1} = 2a_n$ （$n = 1,2,3,\cdots$）

$\{a_n\}$ は初項 2、公比 2 の等比数列である。よって、その一般項は

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

次の形の漸化式を満たす数列$\{a_n\}$の一般項については、階差数列からもとの数列の一般項を求める方法を用いることで、一般項を求められる場合がある。ただし、$f(n)$はnで表された式とする。

$$a_{n+1} = a_n + f(n) \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

（例）

次の条件を満たす数列$\{a_n\}$の一般項を求めよう。

$$a_1 = 1、a_{n+1} = a_n + 3n^2 + n + 1 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

漸化式より

$$a_{n+1} - a_n = 3n^2 + n + 1$$

すなわち、$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると、その一般項は

$$b_n = 3n^2 + n + 1$$

よって、$n \geq 2$のとき

$$\begin{aligned}
&a_n \\
&= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + k + 1) \\
&= 1 + 3 \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2} n(n-1) + (n-1) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(2n^3 - 3n^2 + n) + \frac{1}{2}(n^2 - n) + (n-1) \\
&= n^3 - n^2 + n
\end{aligned}$$

すなわち

$$a_n = n^3 - n^2 + n \quad (n \geq 2)$$

$a_1 = 1$より、上の関係式は$n = 1$のときにも成り立つ。よって

$$a_n = n^3 - n^2 + n \quad (n \geq 1)$$

インデックスに戻る