インデックスに戻る

１５．　数列

１５－２．いろいろな数列

１５－２－２．階差数列

１５－２－２－３．数列の和と一般項の関係

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする。$n \geq 2$のとき

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

であるから

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

が成り立つ。また、

$$S_1 = a_1$$

である。

数列の和と一般項の関係

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとすると

$a_1 = S_1$

$n \geq 2$のとき、$a_n = S_n - S_{n-1}$

（例）

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする。

$$S_n = n^2 + 2n$$

が成り立つとき、$\{a_n\}$の一般項を求めよう。まず

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2\times 1 = 1 + 2 = 3$$

である。$n \geqq 2$のときは

$$\begin{aligned} &a_n \\ &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= (n^2 + 2n) - (n^2 - 2n + 1 + 2n - 2) \\ &= (n^2 + 2n) - (n^2 - 1) \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

すなわち、$n \geqq 2$のとき

$$a_n = 2n + 1 \quad \cdots①$$

関係式①は$n = 1$のときにも成り立っている。よって

$$a_n = 2n + 1 \quad （n \geqq 1）$$

（例）

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする。

$$S_n = n^2 + 2n + 1$$

が成り立つとき、$\{a_n\}$の一般項を求めよう。まず

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2\times 1 + 1 = 4$$

である。$n \geq 2$のときは

$$\begin{aligned} & a_n \\ &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left(n^2 + 2n + 1\right) - \left\{(n-1)^2 + 2(n-1) + 1\right\} \\ &= \left(n^2 + 2n + 1\right) - \left\{\left(n^2 - 2n + 1\right) + (2n - 2) + 1\right\} \\ &= \left(n^2 + 2n + 1\right) - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

すなわち、$n \geq 2$のとき

$$a_n = 2n + 1 \quad \cdots ①$$

関係式①は$n = 1$のときには成り立たない。よって

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 1) \\ 2n + 1 & (n \geq 2) \end{cases}$$

インデックスに戻る