インデックスに戻る

１５．　数列

１５－２．いろいろな数列

１５－２－２．階差数列

１５－２－２－２．数列とその階差数列の関係

$n \geq 2$ とする。数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$a_2 - a_1 = b_1$

$a_3 - a_2 = b_2$

$a_4 - a_3 = b_3$

$\cdots$

$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$

この $n-1$ 本の等式の左辺どうし、右辺どうしを加えると

$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$

よって、次の関係式が成り立つ。

数列とその階差数列の関係

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

$b_n = a_{n+1} - a_n$

であり、$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

（例）

次の数列$\{a_n\}$の一般項を求めよう（ただし、$\{a_n\}$の階差数列は等差数列であるとする）。

$\{a_n\}$：0、1、3、6、⋯

この数列の階差数列を$\{b_n\}$とすると、$\{b_n\}$は

$\{b_n\}$：1、2、3、⋯

よって、$\{b_n\}$は初項 1、公差 1 の等差数列である。$\{b_n\}$の一般項は

$$b_n = 1 + 1\cdot(n-1) = n$$

であり、$n \geq 2$のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 0 + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

よって、$n \geq 2$のとき

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \quad \cdots ①$$

$a_1 = 0$であるから、①は$n = 1$のときも成り立つ。よって、$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

インデックスに戻る