インデックスに戻る

１５． 数列

１５－２．いろいろな数列

１５－２－１．いろいろな数列の和

１５－２－１－４．いろいろな和の求め方

（例）

次の和を求めてみよう。

$$S=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

次の等式は恒等式である。

$$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

これを用いて

$$\begin{aligned}&S\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\\&=\frac{(n+2)-2}{2(n+2)}\\&=\frac{n}{2(n+2)}\end{aligned}$$

同じことを、和の記号Σを用いて表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}&S\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\\&=\frac{n}{2(n+2)}\end{aligned}$$

次のように説明することもできる。

$$
\begin{aligned}
&S\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+1}\\
&=\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\right)-\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{n+2}\\
&=\frac{n+2-2}{2(n+2)}\\
&=\frac{n}{2(n+2)}
\end{aligned}
$$

（例）

次の和を求めよう。

$$S=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}\quad\cdots①$$

①の両辺を２倍すると

$$2S=\qquad 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n\quad\cdots②$$

①－②より

$$
\begin{aligned}
-S&=1\cdot 2^0+1\cdot 2^1+1\cdot 2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n\\
-S&=\frac{1(2^n-1)}{2-1}-n\cdot 2^n\\
-S&=2^n-1-n\cdot 2^n\\
S&=-2^n+1+n\cdot 2^n\\
S&=(n-1)\cdot 2^n+1
\end{aligned}
$$

インデックスに戻る