インデックスに戻る

１５． 数列

１５－２．いろいろな数列

１５－２－１．いろいろな数列の和

１５－２－１－３．Σの性質

すべての項が定数cである数列$\{a_n\}$では、$a_n = c$であり

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} c = nc$$

である。

また、二つの数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$と定数pに対して

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$
$$pa_1 + pa_2 + pa_3 + \cdots + pa_n = p(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

が成り立つ。これらを和の記号Σを用いて書くと、次のようになる。

Σの性質

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Σの性質を利用して、数列の和を求めることができる場合がある。

（例）

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 2 \times \frac{1}{2} n(n+1) - n$$
$$= n(n+1) - n$$
$$= n^2$$

（例）

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + 2k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \times \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\} \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)
\end{aligned}
$$

（例）

$$
\begin{aligned}
&1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)\\
&=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)\times 2(n+2)\\
&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}
$$

インデックスに戻る