インデックスに戻る

１５． 数列

１５－２．いろいろな数列

１５－２－１．いろいろな数列の和

１５－２－１－１．平方数・立方数の和

次の等式は、恒等式である。

$$k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$$

この恒等式の k に $k=1,2,\cdots,n$ を代入していくと、次の n 本の等式を得る。

$$1^3-0^3=3\times1^2-3\times1+1$$
$$2^3-1^3=3\times2^2-3\times2+1$$
$$3^3-2^3=3\times3^2-3\times3+1$$
$$\cdots$$
$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$$

この n 本の等式の左辺どうし、右辺どうしを加えることにより

$$n^3=3\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)-3(1+2+3+\cdots+n)+n$$

ここで、

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

とすると

$$n^3=3S-3\times\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$2n^3=6S-3n(n+1)+2n$$
$$6S=2n^3+3n(n+1)-2n$$
$$6S=n\left\{2n^2+3(n+1)-2\right\}$$
$$6S=n\left(2n^2+3n+1\right)$$
$$6S=n(n+1)(2n+1)$$
$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

さらに、恒等式

$$k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$$

に、$k=1,2,3,\cdots,n$ を代入すると

$$1^4-0^4=4\times1^3-6\times1^2+4\times1-1$$
$$2^4-1^4=4\times2^3-6\times2^2+4\times2-1$$
$$3^4-2^4=4\times3^3-6\times3^2+4\times3-1$$
$$\cdots$$
$$n^4-(n-1)^4=4\times n^3-6\times n^2+4\times n-1$$

この n 本の等式の左辺どうし、右辺どうしを加えることにより

$$n^4=4\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)-6\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+4(1+2+3+\cdots+n)-n$$

ここで、

$$T=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

とすると

$$n^4=4T-6S+4\times\frac{1}{2}n(n+1)-n$$
$$n^4=4T-6S+2n(n+1)-n$$
$$n^4=4T-6\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n$$
$$n^4=4T-n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n$$
$$4T=n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$$
$$4T=n\left\{n^3+(n+1)(2n+1)-2(n+1)+1\right\}$$
$$4T=n\left\{n^3+\left(2n^2+3n+1\right)-(2n+2)+1\right\}$$
$$4T=n\left(n^3+2n^2+n\right)$$
$$4T=n^2\left(n^2+2n+1\right)$$
$$4T=n^2(n+1)^2$$
$$T=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

平方数・立方数の和

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

（例）

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2=\frac{1}{6}\times 20\times 21\times 41=2870$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3=\frac{1}{4}\times 20^2\times 21^2=44100$$

インデックスに戻る