インデックスに戻る

# １５． 数列

## １５－１． 等差数列と等比数列

### １５－１－５．等比数列の和

#### １５－１－５－１．等比数列の和の公式

初項$a$、公比$r$の等比数列$\{a_n\}$の初項から第$n$項までの和を$S_n$とする。

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots①$$

$r \neq 1$のとき

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots②$$

①－②より

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

$r \neq 1$より$1-r \neq 0$であるから

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

右辺の分子と分母の差の順序を変えても、右辺の値は変わらないから、次のように書き換えることもできる。

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

また、$r=1$のときは、数列$\{a_n\}$の項は常に一定で$a_n = a$であるから、$S_n$は$n$個の$a$の和である。すなわち

$$S_n = na$$

等比数列の和

初項$a$、公比$r$の等比数列の初項から第$n$項までの和$S_n$は次のようになる。

$r \neq 1$のとき、$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$のとき、$S_n = na$

（例）

初項1、公比2の等比数列の初項から第$n$項までの和を$S_n$とすると

$$S_n=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

（例）

初項$\frac{1}{2}$、公比$\frac{1}{2}$の等比数列の初項から第$n$項までの和を$S_n$とすると

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

（例）

初項から第3項までの和が21、第4項から第6項までの和が168である等比数列の初項$a$と公比$r$を求めよう。

初項から第3項までの和は

$$a+ar+ar^2=a(1+r+r^2)$$

第4項から第6項までの和は

$$ar^3+ar^4+ar^5=ar^3(1+r+r^2)$$

であるから、

$$a(1+r+r^2)=21 \quad \cdots①、\ ar^3(1+r+r^2)=168 \quad \cdots②$$

①②について、右辺どうし、左辺どうしを割ることにより

$$\frac{ar^3(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)}=\frac{168}{21}$$

$$r^3=8$$

$$r=2$$

①より

$$a(1+2+4)=21$$

$$7a=21$$

$$a=3$$

以上より、

$$a=3、r=2$$

インデックスに戻る