

[インデックスに戻る](#)

7. 式と証明

7-2. 式の証明

7-2-2. 不等式の証明

7-2-2-5. 相加平均と相乗平均

2つの正の数 a 、 b に対して、 $\frac{a+b}{2}$ を a と b の相加平均という。また、 $\sqrt{ab}$ を a と b の相乗平均という。

2つの正の数 a 、 b の相加平均と相乗平均については、次の不等式が成り立つ。

$a > 0$ 、 $b > 0$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

が成り立つ。また、等号が成立するのは $a = b$ のときである。

(証明)

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

が成り立つ。等号が成立するのは

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$$

すなわち

$$a = b$$

のときである。

これを利用して、不等式が証明できる場合がある。

(例)

$x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示す。

$$9x + \frac{4}{x} \geq 12$$

(証明)

$x > 0$ より、 $9x > 0$ 、 $\frac{4}{x} > 0$ であるから

$$\frac{9x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{9x \cdot \frac{4}{x}}$$

$$\frac{9x + \frac{4}{x}}{2} \geq 6$$

$$9x + \frac{4}{x} \geq 12$$

また、等号が成り立つのは、

$$9x = \frac{4}{x}$$

のときであるが、 $x > 0$ であるから、それは

$$x = \frac{2}{3}$$

のときである。

[インデックスに戻る](#)