インデックスに戻る

７．式と証明

７－２．式の証明

７－２－２．不等式の証明

７－２－２－３．正の数の大小と平方

a、b は正の数とする。

$a > b$ ならば

$$a^2 > ab \quad かつ \quad ab > b^2$$

であるから

$$a^2 > b^2$$

が成り立つ。

$a < b$ ならば、

$$a^2 < ab \quad かつ \quad ab < b^2$$

であるから

$$a^2 < b^2$$

が成り立つ。

$a = b$ ならば

$$a^2 = b^2$$

である。以上より、次のことが成り立つ。

$a > 0$、$b > 0$ のとき

$$a > b \iff a^2 > b^2$$

$$a \geq b \iff a^2 \geq b^2$$

（例）

$a > 0$、$b > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示す。

$\sqrt{a} + 2\sqrt{b} > \sqrt{a + 4b}$

不等式の両辺の平方を考えて

$$\left(\sqrt{a} + 2\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a + 4b}\right)^2$$

$$= \left(a + 4\sqrt{a}\sqrt{b} + 4b\right) - \left(a + 4b\right)$$

$$= 4\sqrt{ab} > 0$$

よって

$$\left(\sqrt{a} + 2\sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{a + 4b}\right)^2$$

$\sqrt{a} + 2\sqrt{b} > 0$、$\sqrt{a + 4b} > 0$ であるから

$\sqrt{a} + 2\sqrt{b} > \sqrt{a + 4b}$

インデックスに戻る