インデックスに戻る

７．式と証明

７－２．式の証明

７－２－２．不等式の証明

７－２－２－２．実数の平方と不等式

$x > 0$、$y > 0 \quad \Rightarrow \quad xy > 0$

であったから、$a > 0$ のとき

$a^2 = aa > 0$

である。また、

$x < 0$、$y < 0 \quad \Rightarrow \quad xy > 0$

であったから、$a < 0$ のとき

$a^2 = aa > 0$

である。また、$a = 0$ のとき

$a^2 = 0$

である。したがって、a が実数ならば a の符号にかかわらず

$a^2 \geq 0$

が成り立ち、等号が成り立つのは $a = 0$ のときである。

$x > 0$、$y > 0 \quad \Rightarrow \quad x + y > 0$

であった。$x = 0$、$y > 0$ のときは

$x + y = y > 0$

であり、$x > 0$、$y = 0$ のときは

$x + y = x > 0$

であり、$x = 0$、$y = 0$ のときは

$x + y = 0$

であるから、

$x \geq 0$、$y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x + y \geq 0$

が成り立ち、等号が成り立つのは、$x = y = 0$ のときである。

以上より、a、b が実数のとき

$a^2 \geq 0$、$b^2 \geq 0$

であるから、

$a^2 + b^2 \geq 0$

が成り立ち、等号が成り立つのは、$a = b = 0$ のときである。

a を実数とする。

$$a^2 \geq 0$$

が成り立ち、等号が成り立つのは、$a = 0$ のときである。

a 、b を実数とする。

$$a^2 + b^2 \geq 0$$

が成り立ち、等号が成り立つのは、$a = b = 0$ のときである。

同様に k 、l を正の数とすると、実数 a 、b について

$$ka^2 + lb^2 \geq 0$$

が成り立ち、等号が成り立つのは、$a = b = 0$ の場合である。

（例）

a、b が実数のとき

$$2a^2+6ab+5b^2 \geq 0$$

が成り立つことを証明する。

（左辺）

$$=2\left(a^2+3ab\right)+5b^2$$

$$=2\left\{\left(a+\frac{3}{2}b\right)^2-\left(\frac{3}{2}b\right)^2\right\}+5b^2$$

$$=2\left\{\left(a+\frac{3}{2}b\right)^2-\frac{9}{4}b^2\right\}+5b^2$$

$$=2\left(a+\frac{3}{2}b\right)^2-\frac{9}{2}b^2+5b^2$$

$$=2\left(a+\frac{3}{2}b\right)^2+\frac{1}{2}b^2 \quad \cdots①$$

$2\left(a+\frac{3}{2}b\right)^2 \geq 0$、$\frac{1}{2}b^2 \geq 0$ であるから

$$2\left(a+\frac{3}{2}b\right)^2+\frac{1}{2}b^2 \geq 0 \quad \cdots②$$

①と②より

（左辺）$\geqq 0$

また、等号が成り立つのは

$$2\left(a+\frac{3}{2}b\right)^2=0、\frac{1}{2}b^2=0$$

すなわち

$$a=b=0$$

のときである。

（例）

a、b、c、d を実数とする。

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ab+bc+cd+da$$

が成り立つことを示す。

（左辺）－（右辺）

$$=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-\left(ab+bc+cd+da\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2-2ab+b^2\right)+\frac{1}{2}\left(b^2-2bc+c^2\right)+\frac{1}{2}\left(c^2-2cd+d^2\right)+\frac{1}{2}\left(d^2-2da+a^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-d)^2+\frac{1}{2}(d-a)^2 \quad \cdots①$$

$\frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0$、$\frac{1}{2}(b-c)^2 \geq 0$、$\frac{1}{2}(c-d)^2 \geq 0$、$\frac{1}{2}(d-a)^2 \geq 0$ より

$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-d)^2+\frac{1}{2}(d-a)^2 \geq 0 \quad \cdots②$$

①と②より

（左辺）≧（右辺）

等号が成立するのは

$$\frac{1}{2}(a-b)^2=\frac{1}{2}(b-c)^2=\frac{1}{2}(c-d)^2=\frac{1}{2}(d-a)^2=0$$

すなわち

$$a=b=c=d$$

のときである。

インデックスに戻る