インデックスに戻る

７．式と証明

７－２．式の証明

７－２－２．不等式の証明

７－２－２－１．大小関係と不等式の性質

任意の２つの実数 a 、 b については、必ず

$a > b$ 、 $a = b$ 、 $a < b$

のうち、どれかが成り立ち、また、２つ以上が同時に成り立つことはない。

不等式の基本的な性質として、次のようなものがある。

a 、 b 、 c は実数とする。

$a > b$ 、 $b > c \quad \Rightarrow \quad a > c$

$a > b \quad \Rightarrow \quad a + c > b + c$ 、 $a - c > b - c$

$a > b$ 、 $c > 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc$ 、 $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

$a > b$ 、 $c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac < bc$ 、 $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

また、これらの性質から、実数の符号について、次のことが成り立つ。

a 、 b は実数とする。

$a > 0$ 、 $b > 0 \quad \Rightarrow \quad a + b > 0$

$a > 0$ 、 $b > 0 \quad \Rightarrow \quad ab > 0$

$a < 0$ 、 $b < 0 \quad \Rightarrow \quad a + b < 0$

$a < 0$ 、 $b < 0 \quad \Rightarrow \quad ab > 0$

$a > 0$ 、 $b < 0 \quad \Rightarrow \quad ab < 0$

また、 a と b の大小と $a - b$ の符号について、次のことが成り立つ。

a 、 b は実数とする。

$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0$

$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a - b < 0$

したがって、不等式 $A > B$ を証明するかわりに、 $A - B > 0$ を示してもよい。

（例）

次のことを証明せよ。

$a > b$、$x > y \quad \Rightarrow \quad a + x > b + y$

（証明１）

仮定より

$a > b$ …① 、 $x > y$ …②

①より

$a + x > b + x$ …③

②より

$b + x > b + y$ …④

③と④より

$a + x > b + y$

（証明２）

$$\begin{aligned} &(a + x) - (b + y) \\ &= a + x - b - y \\ &= a - b + x - y \\ &= (a - b) + (x - y) \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

ここで、$a > b$ より

$a - b > 0$ …⑥

$x > y$ より

$x - y > 0$ …⑦

⑥と⑦より

$(a - b) + (x - y) > 0$ …⑧

⑤と⑧より

$(a + x) - (b + y) > 0$

したがって

$a + x > b + y$

インデックスに戻る