インデックスに戻る

７．式と証明
７－２．式の証明
７－２－１．等式の証明
７－２－１－２．条件のついた等式の証明

条件のついた等式の証明では、条件を次のように用いるとよい。

［１］　条件をある文字について解いて、証明すべき等式からその文字を消去する。
［２］　条件をうまく使って、証明すべき式の左辺、右辺を簡単にしていく。
［３］　条件を使わずに進めてみて、最後に用いる。

（例）

$$a+b+c=0 \quad \cdots ①$$

のとき、次の等式が成り立つことを証明する。

$$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)=-3abc \quad \cdots ②$$

（証明１）

①より

$$c=-a-b \quad \cdots ③$$

③より

（②の左辺）

$$\begin{aligned}
&= b(-a-b)\{b+(-a-b)\}+(-a-b)a\{(-a-b)+a\}+ab(a+b) \\
&= b(-a-b)(-a)+(-a-b)a(-b)+ab(a+b) \\
&= ab(a+b)+ab(a+b)+ab(a+b) \\
&= 3ab(a+b) \\
&= 3a^2b+3ab^2
\end{aligned}$$

（②の右辺）

$$\begin{aligned}
&= -3ab(-a-b) \\
&= 3a^2b+3ab^2
\end{aligned}$$

よって

（②の左辺）＝（②の右辺）

（注）　この証明では、条件を用いて文字 c を消去している。

（証明２）

①より

$c=-a-b$　…③

③より

（②の左辺）－（②の右辺）

$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)-(-3abc)$

$=b(-a-b)\{b+(-a-b)\}+(-a-b)a\{(-a-b)+a\}+ab(a+b)+3ab(-a-b)$

$=b(-a-b)(-a)+(-a-b)a(-b)+ab(a+b)-3ab(a+b)$

$=ab(a+b)+ab(a+b)+ab(a+b)-3ab(a+b)$

$=3ab(a+b)-3ab(a+b)$

$=0$

よって

（②の左辺）＝（②の右辺）

（注）　この証明では、条件を用いて文字 c を消去している。

（証明３）

①より

$b+c=-a$、$c+a=-b$、$a+b=-c$　…④

④より

（②の左辺）

$=bc(-a)+ca(-b)+ab(-c)$

$=-abc-abc-abc$

$=-3abc$

＝（②の右辺）

よって、

（②の左辺）＝（②の右辺）

（注）　この証明では、条件をうまく用いて左辺を簡単にしている。

（証明４）

（②の左辺）－（②の右辺）

$$\begin{aligned}
&= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)-(-3abc) \\
&= bc(b+c)+\left(c^2a+ca^2\right)+\left(a^2b+ab^2\right)+3abc \\
&= bc(b+c)+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+3abc \\
&= (b+c)a^2+\left(b^2+3bc+c^2\right)a+bc(b+c) \\
&= \{(b+c)a+bc\}\{a+(b+c)\} \\
&= (bc+ca+ab)(a+b+c) \\
&= (bc+ca+ab)\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって、

（②の左辺）＝（②の右辺）

（注）　この証明では、条件を使わずに進めて最後に用いている。

（例）

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3} \quad \cdots ①$$

のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。ただし $x \neq 0$ 、 $y \neq 0$ とする。

$$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{13}{6} \quad \cdots ②$$

（証明１）

①より

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=k \qquad (k \text{ は実数})$$

と置くことができる。このとき

$x=2k$ 、 $y=3k$ $\cdots$③

である。③より

（②の左辺）

$$=\frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$=\frac{(2k)^2+(3k)^2}{2k\cdot 3k}$$

$$=\frac{4k^2+3k^2}{6k^2}$$

$$=\frac{13k^2}{6k^2}$$

$$=\frac{13}{6}$$

＝（②の右辺）

よって

（②の左辺）＝（②の右辺）

（証明２）

①より

$$y=\frac{3}{2}x \quad \cdots ④$$

④より

（②の左辺）

$$=\frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$=\frac{x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{x\cdot\frac{3}{2}x}$$

$$=\frac{x^2+\frac{9}{4}x^2}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\frac{\frac{13}{4}x^2}{\frac{3}{2}x^2}$$

$$=\frac{13x^2}{4}\cdot\frac{2}{3x^2}$$

$$=\frac{13}{6}$$

＝（②の右辺）

よって

（②の左辺）＝（②の右辺）

（証明３）

①より

$3x = 2y$

$\dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}$、$\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$　…⑤

⑤より

（②の左辺）

$= \dfrac{x^2}{xy} + \dfrac{y^2}{xy}$

$= \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

$= \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{2}$

$= \dfrac{13}{6}$

＝（②の右辺）

よって

（②の左辺）＝（②の右辺）

（証明４）

①より

$$3x = 2y$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{2} \quad \cdots ⑥$$

⑥より

（②の左辺）

$$= \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2}}{\dfrac{xy}{x^2}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{y}{x}}{\dfrac{y}{x}}$$

$$= \frac{1 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{\dfrac{3}{2}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{9}{4}}{\dfrac{3}{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{13}{4}}{\dfrac{3}{2}}$$

$$= \frac{13}{6}$$

＝（②の右辺）

よって

（②の左辺）＝（②の右辺）

（証明５）

①より

$$3x = 2y \quad \cdots ⑦$$

⑦より

（②の左辺）－（②の右辺）

$$= \frac{x^2 + y^2}{xy} - \frac{13}{6}$$

$$= \frac{6(x^2 + y^2)}{6xy} - \frac{13xy}{6xy}$$

$$= \frac{6x^2 - 13xy + 6y^2}{6xy}$$

$$= \frac{(3x - 2y)(2x - 3y)}{6xy}$$

$$= \frac{0 \cdot (2x - 3y)}{6xy}$$

$$= 0$$

よって

（②の左辺）＝（②の右辺）

インデックスに戻る