インデックスに戻る

７． 式と証明
７－１． 式と計算
７－１－３． 恒等式とその性質
７－１－３－２． 恒等式の性質

a、b、cは実数の定数とし、次の等式がxについての恒等式であるとする。

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots ①$$

①は$x=0$のとき成り立つから

$$c=0 \quad \cdots ②$$

①は$x=1$のとき成り立つから

$$a+b+c=0 \quad \cdots ③$$

①は$x=2$のとき成り立つから

$$4a+2b+c=0 \quad \cdots ④$$

②③④より、連立方程式を解いて

$$a=b=c=0 \quad \cdots ⑤$$

逆に⑤が成り立てば、①がxについての恒等式であることはあきらかである。

よって、次のことがいえる。

$ax^2+bx+c=0$がxについての恒等式　$\Leftrightarrow$　$a=b=c=0$

等式

$$ax^2+bx+c=dx^2+ex+f$$

がxについての恒等式であれば

$$(a-d)x^2+(b-e)x+(c-f)=0$$

も恒等式であり、その逆もいえる。これと上の性質を合わせると、次のことがわかる。

$ax^2+bx+c=dx^2+ex+f$がxについての恒等式　$\Leftrightarrow$　$a=d$、$b=e$、$c=f$

一般に、左辺・右辺が x の多項式である等式について、左辺・右辺それぞれの同類項が整理されている場合、この等式が恒等式であるための条件は次のようになる。

> $P(x)$、$Q(x)$ を x についての多項式とする。
> 　$P(x)=0$ が恒等式　$\Leftrightarrow$　$P(x)$ の各項の係数がすべて 0
> 　$P(x)=Q(x)$ が恒等式　$\Leftrightarrow$　$P(x)$ と $Q(x)$ の次数が等しく、同じ次数の係数は等しい。

（例）

a 、b 、c は実数の定数とする。等式

$$x^2+x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c \quad \cdots（＊）$$

が恒等式であるときの、a 、b 、c の値を求める。

（方法１）

右辺を整理すると

（右辺）

$$\begin{aligned}&=a(x-1)^2+b(x-1)+c\\&=a\left(x^2-2x+1\right)+b(x-1)+c\\&=ax^2-2ax+a+bx-b+c\\&=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)\end{aligned}$$

したがって、（＊）が恒等式であるための条件は

$$\begin{cases}1=a\\1=-2a+b\\1=a-b+c\end{cases}$$

この連立方程式を解くことにより

$a=1$ 、$b=3$ 、$c=3$

であることがわかる。

（方法２）

（＊）が恒等式であるならば、$x=0$ 、$x=1$、$x=2$ を代入したとき、（＊）は成り立つ。よって

$$\begin{cases}1=a-b+c\\3=c\\7=a+b+c\end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$a=1$ 、$b=3$ 、$c=3$

すなわち、

（＊）が恒等式　⇒　$a=1$、$b=3$、$c=3$

である。逆に

$a=1$、$b=3$、$c=3$

ならば、

｛(＊) の右辺｝

$=(x-1)^2+3(x-1)+3$

$=(x^2-2x+1)+(3x-3)+3$

$=x^2+x+1$

＝｛(＊) の左辺｝

であるから、(＊) は恒等式である。すなわち

$a=1$、$b=3$、$c=3$　⇒　（＊）が恒等式

よって、(＊) が恒等式であるような、a、b、c の値は

$a=1$、$b=3$、$c=3$

一般に、x の多項式 $P(x)$、$Q(x)$ の次数がともに n 以下であるとき、$n+1$ 個の異なる x の値に対して $P(x)=Q(x)$ が成り立つならば、$P(x)=Q(x)$ は恒等式であることが知られている。

インデックスに戻る