インデックスに戻る

１０．三角関数

１０－２．加法定理とその応用

１０－２－２．加法定理の応用

１０－２－２－２．三角関数の合成

（例）

$$2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$= 4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

一般に、a、b（$(a,b) \neq (0,0)$）を実数とするとき、$a\sin\theta + b\cos\theta$ は

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$$

の形に変形することができる。

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ とすると

$$a\sin\theta+b\cos\theta=r\left(\frac{a}{r}\sin\theta+\frac{b}{r}\cos\theta\right)\quad\cdots①$$

ここで、$\mathrm{P}\left(\frac{a}{r},\frac{b}{r}\right)$ とすると、

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{b}{r}\right)^2=\frac{a^2}{r^2}+\frac{b^2}{r^2}=\frac{a^2+b^2}{r^2}=\frac{a^2+b^2}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

であるから、点 P は単位円周上の点である。点 P を通る動径を表す角を α とすると

$$\frac{a}{r}=\cos\alpha\text{、}\frac{b}{r}=\sin\alpha$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}&r\left(\frac{a}{r}\sin\theta+\frac{b}{r}\cos\theta\right)\\&=r(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)\\&=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\\&=r\sin(\theta+\alpha)\quad\cdots②\end{aligned}$$

①②より

$$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$$

三角関数の合成

a、b は $(a,b)\neq(0,0)$ を満たす実数とする。$a\sin\theta+b\cos\theta$ は次のように変形できる。

$$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$$

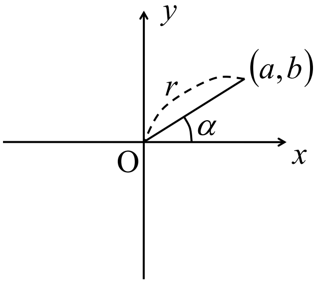
ただし、r、α は実数で

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\ 、\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ 、\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たすものをとったとする。

(注)

次の図を参考にすると覚えやすい。



(注)

この式を満たす α のとり方は（範囲などに制限がなければ）一通りではない。

(例)

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

であり、

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{7}{4}\pi\right)$$

でもある。

（例）

x の関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値を求めてみよう。

$$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

である。$-1\leq\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leq 1$ より

$$-2\leq y\leq 2$$

である。また、

$$y=-2$$

とすると

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-2$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi+2n\pi$$

$$x=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}+2n\pi$$

$$x=\frac{7}{6}\pi+2n\pi \quad （n は整数）$$

また、$y=2$ とすると

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2n\pi$$

$$x=\frac{1}{6}\pi+2n\pi \quad （n は整数）$$

よって、関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ は

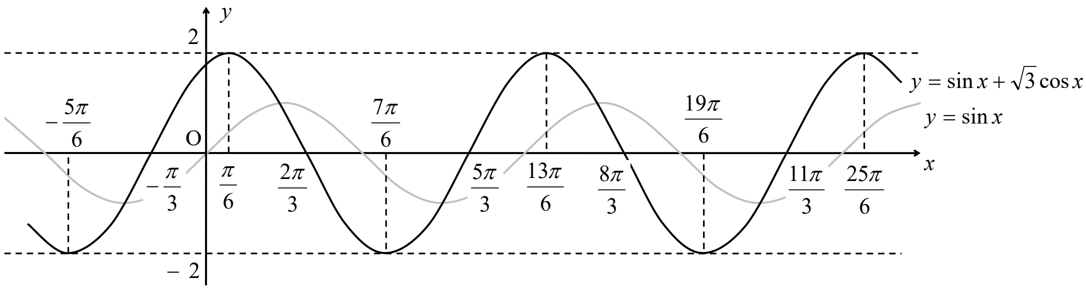
$x=\frac{7}{6}\pi+2n\pi$ のとき最小で最小値は -2

$$x=\frac{1}{6}\pi+2n\pi \text{ のとき最大で最大値は } 2$$

である。ただし、n は整数とする。

（注）

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ より、関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ のグラフは次のようになる。



（例）

$0 \leq x < 2\pi$ とする。次の方程式を解いてみよう。

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

まず、左辺を合成すると

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

整理して

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad \cdots①$$

ここで、$0 \leq x < 2\pi$ より

$$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi \quad \cdots②$$

であるから、①②より

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi \quad \text{または} \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{13}{6}\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{または} \quad x = \frac{13}{6}\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{7}{12}\pi \quad \text{または} \quad x = \frac{23}{12}\pi$$

よって、与えられた方程式の解は

$$x = \frac{7}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi$$

である。

インデックスに戻る