インデックスに戻る

１０．三角関数
１０－２．加法定理とその応用
１０－２－２．加法定理の応用
１０－２－２－１．倍角・半角の公式

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

において、$\beta=\alpha$ とすると

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

を得る。さらに、$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ を用いると

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

を得る。

倍角の公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

（例）

等式 $\cos\theta(\cos 2\theta-1)+\sin\theta\sin 2\theta=0$ を証明してみよう。

（左辺）

$$=\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta-1)+\sin\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\cos\theta\{(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta-1\}+2\sin^2\theta\cos\theta$$
$$=-2\sin^2\theta\cos\theta+2\sin^2\theta\cos\theta$$
$$=0$$

余弦の倍角の公式より

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

これを変形すると

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ とすると

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

また、余弦の倍角の公式より

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

これを変形して

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ とすると

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

さらに、

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

が成り立つ。

半角の公式

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

（例）

$$\cos^2\frac{5\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{5}{4}\pi}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\frac{5}{8}\pi<0$ より

$$\cos\frac{5}{8}\pi=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

（例）

$0\le\theta<2\pi$ として、方程式 $\cos 2\theta=\sin\theta$ を解いてみよう。

$$\cos 2\theta=\sin\theta$$
$$1-2\sin^2\theta=\sin\theta$$
$$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$$
$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$$
$$\sin\theta=\frac{1}{2}、\ \sin\theta=-1$$

$0\le\theta<2\pi$ より

$$\theta=\frac{1}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi,\frac{3}{2}\pi$$

インデックスに戻る