インデックスに戻る

１０．三角関数

１０－２．加法定理とその応用

１０－２－１．加法定理

１０－２－１－２．正接の加法定理

正弦・余弦についての加法定理を用いると、次のことがいえる。

$$
\begin{aligned}
&\tan(\alpha+\beta) \\
&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\
&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\
&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

さらに、これを利用すると、次のことが成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\tan(\alpha-\beta) \\
&=\tan\{\alpha+(-\beta)\} \\
&=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)} \\
&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

正接の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

（例）

$$\begin{aligned}
&\tan\frac{7}{12}\pi\\
&=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\
&=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}\\
&=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\\
&=-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\\
&=-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}\\
&=-\frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}\\
&=-\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\\
&=-\left(2+\sqrt{3}\right)\\
&=-2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

（例）

$\tan\alpha = 5$、$\tan\beta = -3$ のときの $\tan(\alpha-\beta)$ の値を求める。

$$\begin{aligned}
&\tan(\alpha-\beta)\\
&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\
&=\frac{5-(-3)}{1+5\cdot(-3)}\\
&=\frac{8}{1-15}\\
&=\frac{8}{-14}\\
&=-\frac{4}{7}
\end{aligned}$$

インデックスに戻る