インデックスに戻る

１０．三角関数

１０－２．加法定理とその応用

１０－２－１．加法定理

１０－２－１－１．正弦と余弦の加法定理

実数α、βについて、次の式が成り立つことを示す。

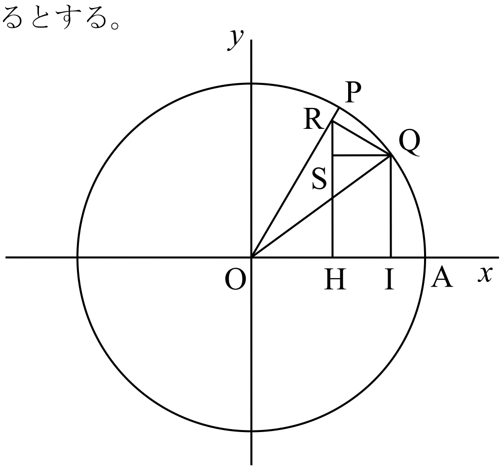
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots※1$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots※2$$

まず、

$$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

が成り立っているとする。



$A(1,0)$、角αの動径と単位円の交点をP、角$\alpha-\beta$の動径と単位円の交点をQとすると、

$$\angle AOP=\alpha \quad \cdots①$$

$$\angle AOQ=\alpha-\beta \quad \cdots②$$

$$\angle QOP=\beta \quad \cdots③$$

$$OP=1 \quad \cdots④$$

$$OQ=1 \quad \cdots⑤$$

である。点QからOPに下ろした垂線の足をRとする。③⑤より

$$OR=\cos\beta \quad \cdots⑥$$

$$QR=\sin\beta \quad \cdots⑦$$

点Rからx軸に下ろした垂線の足をH、点Qからx軸に下ろした垂線の足をIとし、点QからRHに下ろした垂線の足をSとする。

$$\angle SRQ=\alpha \quad \cdots⑧$$

①⑥より

$$OH=OR\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta \quad \cdots⑨$$

⑦⑧より

$\mathrm{IH}=\mathrm{QS}=\mathrm{QR}\sin\alpha=\sin\alpha\sin\beta$ …⑩

⑨⑩より

$\mathrm{OI}=\mathrm{OH}+\mathrm{IH}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

よって、

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

①⑥より

$\mathrm{RH}=\mathrm{OR}\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta$ …⑪

⑦⑧より

$\mathrm{RS}=\mathrm{QR}\cos\alpha=\cos\alpha\sin\beta$ …⑫

⑪⑫より

$\mathrm{QI}=\mathrm{SH}=\mathrm{RH}-\mathrm{RS}=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

よって

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

以上より、$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$において、※1、※2 が成り立つことが示された。

次に$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$の場合については、$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$の$\alpha$と$\beta$が入れ替わったものと考えればよい。実際

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\{-(\beta-\alpha)\}=\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\{-(\beta-\alpha)\}=-\sin(\beta-\alpha)=-(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)$

$=-\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha=-\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

であるから、この場合も※1、※2 は成り立つ。

また、$0<\alpha=\beta<\dfrac{\pi}{2}$の場合は

$\cos(\alpha-\beta)=\cos 0=1$、$\sin(\alpha-\beta)=\sin 0=0$

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha=0$

より、※1、※2 は成り立つ。

以上より、$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$、$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$の場合に※1、※2 は成り立つ。

また、$\alpha=0$または$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$または$\beta=0$または$\beta=\dfrac{\pi}{2}$の場合に、※1、※2 が成り立つことは、これらの値を代入することで確かめられる。

以上より$0\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$、$0\leq\beta\leq\dfrac{\pi}{2}$の場合に、※1、※2 は成り立つ。

以下で、これ以外の範囲についても、※1、※2 が成り立つことを示す。

$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ 、$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合には、$0 \leq \alpha - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos(\alpha-\beta) = -\sin\left\{(\alpha-\beta)-\frac{\pi}{2}\right\} = -\sin\left\{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\beta\right\}$$
$$= -\left\{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta - \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta\right\}$$
$$= -(-\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \cos\left\{(\alpha-\beta)-\frac{\pi}{2}\right\} = \cos\left\{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\beta\right\}$$
$$= \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta + \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

となるので、※1、※2 は成り立つ。

よって、$0 \leq \alpha \leq \pi$ 、$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合、※1、※2 が成り立つ。

さらに $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ 、$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合、$0 \leq \alpha - \pi \leq \pi$ であるから

$$\cos(\alpha-\beta) = -\cos\{(\alpha-\beta)-\pi\} = -\cos\{(\alpha-\pi)-\beta\}$$
$$= -\{\cos(\alpha-\pi)\cos\beta + \sin(\alpha-\pi)\sin\beta\}$$
$$= -(-\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = -\sin\{(\alpha-\beta)-\pi\} = -\sin\{(\alpha-\pi)-\beta\}$$
$$= -\{\sin(\alpha-\pi)\cos\beta - \cos(\alpha-\pi)\sin\beta\}$$
$$= -(-\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

であるから、※1、※2 は成り立つ。

よって、$0 \leq \alpha \leq 2\pi$ 、$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合、※1、※2 は成り立つ。

同様に、$0 \leq \alpha \leq 2\pi$ に対して

$\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi$ のとき

$$\cos(\alpha-\beta) = \sin\left\{(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left\{a-\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= \sin\alpha\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\alpha\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=-\cos\left\{(\alpha-\beta)+\dfrac{\pi}{2}\right\}=-\cos\left\{\alpha-\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

$=-\left\{\cos\alpha\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\alpha\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$

$=-(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

であるから、$0\leq\beta\leq\pi$ でも※1、※2 が成り立ち、さらに $\pi\leq\beta\leq 2\pi$ のときは

$\cos(\alpha-\beta)=-\cos\{(a-\beta)+\pi\}=-\cos\{\alpha-(\beta-\pi)\}$

$=-\{\cos\alpha\cos(\beta-\pi)+\sin\alpha\sin(\beta-\pi)\}$

$=-\{-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\}$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=-\sin\{(\alpha-\beta)+\pi\}=-\sin\{\alpha-(\beta-\pi)\}$

$=-\{\sin\alpha\cos(\beta-\pi)-\cos\alpha\sin(\beta-\pi)\}$

$=-(-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

であるから、$0\leq\beta\leq 2\pi$ でも※1、※2 は成り立つ。

よって、$0\leq\alpha\leq 2\pi$ 、$0\leq\beta\leq 2\pi$ の範囲で※1、※2 が成り立つ。

一般の実数 α 、β に対しては、適当な整数 m 、n をとれば

$0\leq\alpha+2m\pi<2\pi$ 、$0\leq\beta+2n\pi<2\pi$

が成り立つから

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\{(\alpha-\beta)+2(m-n)\pi\}=\cos\{(\alpha+2m\pi)-(\beta+2n\pi)\}$

$=\cos(\alpha+2m\pi)\cos(\beta+2n\pi)+\sin(\alpha+2m\pi)\sin(\beta+2n\pi)$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\{(\alpha-\beta)+2(m-n)\pi\}=\sin\{(\alpha+2m\pi)-(\beta+2n\pi)\}$

$=\sin(\alpha+2m\pi)\cos(\beta+2n\pi)-\cos(\alpha+2m\pi)\sin(\beta+2n\pi)$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

となり、※1、※2 が成り立つ。以上より、すべての実数 α 、β について、※1、※2 が成り立つことが示された。

さらに、これを用いて

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\{\alpha-(-\beta)\}$

$=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\{\alpha-(-\beta)\}$

$=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

が示される。

正弦・余弦の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

（例）

$$\sin\frac{\pi}{12}$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

（注）

正弦・余弦の加法定理の証明については、若干直感的にはなるが、以下のような方法もある。

角αの動径、角βの動径、角$\alpha-\beta$の動径と単位円との交点を、それぞれA、B、Cとし、$D(1,0)$とする。三角形OABを原点の回りに$-\beta$だけ回転すると三角形OCDに重なることより、三角形OABと三角形OCDは合同であるから

$$AB=CD \quad \cdots①$$

一方で、三角関数の定義より、$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$B(\cos\beta,\sin\beta)$であるから、2 点間の距離の公式を用いて

$$AB$$
$$=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$$
$$=\sqrt{(\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)+(\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)}$$
$$=\sqrt{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}$$
$$=\sqrt{1+1-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}$$

$$=\sqrt{2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)} \quad \cdots②$$

同様に、$C(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$であるから

CD

$$=\sqrt{\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\{\sin(\alpha-\beta)\}^2}$$

$$=\sqrt{(\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1)+\sin^2(\alpha-\beta)}$$

$$=\sqrt{\{\cos^2(\alpha-\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)\}+1-2\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\sqrt{1+1-2\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)} \quad \cdots③$$

①②③より

$$\sqrt{2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}$$

両辺を 2 乗して

$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$$
$$-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=-2\cos(\alpha-\beta)$$
$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$$

以上より

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots※1$$

これは、α、βの大きさや大小関係にはよらない。※1 を用いると

$$\sin(\alpha-\beta)==-\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\alpha-\beta)\right)=-\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\beta\right\}$$

$$=-\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta\right\}$$
$$=-(-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

よって

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots※2$$

あとは、先ほどの証明と同様にして

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

を示すことができる。

インデックスに戻る