インデックスに戻る

１０．三角関数
１０－１．定義と基本性質
１０－１－４．三角関数を含む方程式・不等式
１０－１－４－１．方程式

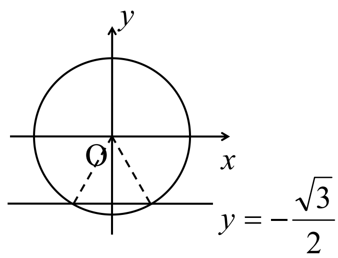
（例）

$0 \le \theta < 2\pi$ とする。方程式 $2\sin\theta + \sqrt{3} = 0$ について考える。

まず、$\sin\theta$ について解く。

$$2\sin\theta = -\sqrt{3}$$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



この方程式を満たす角 θ の動径と単位円との交点の y 座標が $\sin\theta$ であり、それが $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ に等しい。単位円と直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ との交点を求めると、その座標は $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。この点を通る動径を表す角 θ で、$0 \le \theta < 2\pi$ を満たすものは、それぞれ

$$\theta = \frac{4}{3}\pi \text{、} \theta = \frac{5}{3}\pi$$

である。よって、この方程式は $0 \le \theta < 2\pi$ の範囲に 2 つの実数解をもち、その解は

$$\theta = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

である。

（注）

一般角の範囲では（$0 \le \theta < 2\pi$ に制限しなければ）

$$\theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi, \frac{5}{3}\pi + 2n\pi \qquad (n \text{ は整数})$$

が解である。解は無数にある。

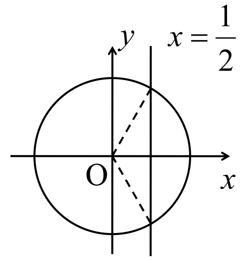
（例）

$-\pi \leq \theta < \pi$ とする。方程式 $2\cos\theta - 1 = 0$ について考える。

まず、$\cos\theta$ について解くと

$$2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$



単位円と直線 $x = \frac{1}{2}$ との交点の座標は $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり、この点を通る動径を表す角は、$-\pi \leq \theta < \pi$ の範囲でそれぞれ、$\theta = -\frac{\pi}{3}$、$\theta = \frac{\pi}{3}$ である。

以上より、この方程式の解は

$$\theta = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$

（例）

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。方程式 $\tan\theta = \sqrt{3}$ について考える。

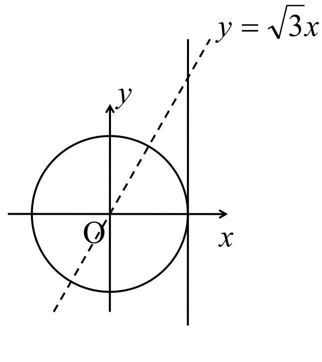
この方程式を満たす θ の動径と直線 $x = 1$ との交点の座標は $\left(1, \sqrt{3}\right)$ である。この点を通る動径を表す角で $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たすものは

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

である。よって、この方程式の $0 \leq \theta < 2\pi$ における解は

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

である。



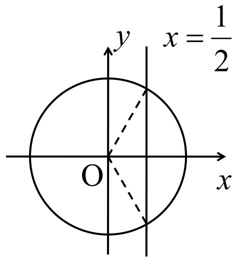
（例）

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする。方程式 $2\sin^2\theta + 5\cos\theta = 4$ について考える。

$$2\sin^2\theta + 5\cos\theta = 4$$
$$2(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta = 4$$
$$2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$$
$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 2) = 0$$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ より $\cos\theta - 2 \neq 0$ であるから

$$2\cos\theta - 1 = 0$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$



$0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

インデックスに戻る