インデックスに戻る

５．論理と集合

５－１．命題・条件・集合

５－１－２．条件と集合

５－１－２－１．「ならば」を用いた命題

「100 より大きければ 1 より大きい」という文は、命題とみなすことができて、この命題は真である。この命題は、2 つの条件 p ：「$x>100$」、q ：「$x>1$」を用いて、「p ならば（必ず）q」と表現できるといってもいいだろう。この命題を記号で「$p\Rightarrow q$」と書き、p をこの命題の仮定、q をこの命題の結論という。

（注）

直接には“ならば”という表現を含んでいない命題であっても、“ならば”という表現を用いて書き直すことができる場合がある。「正三角形は二等辺三角形である」は命題であり、この命題は真である。これを「三角形 T が正三角形ならば、（三角形 T は）二等辺三角形である」と言い換えることができる。

（注）

「$x>100$　ならば　$x>1$」を命題とみなすこともできるが、この文・式には文字 x が含まれている。「命題の一部分を文字・変数に変えたもの」が“条件”であるとしたので、これは紛らわしい。その意味で「$x>100$　ならば　$x>1$」を「すべての実数 x について、$x>100$ ならば $x>1$」と表現することがある。文字・変数が含まれているにもかかわらず命題になるものを、“すべての（任意の）”、“適当な（ある、…が存在する）”を用いて表現する。

（例）

「すべての実数 x について $x^2\geq 0$」は命題であり、この命題は真である。「任意の実数 x について $x^2\geq 0$」も同じ意味である。

「すべての実数 x について $x^2\leq 0$」は命題であり、この命題は偽である。

「適当な実数 x について $x^2\geq 0$」は命題であり、この命題は真である。

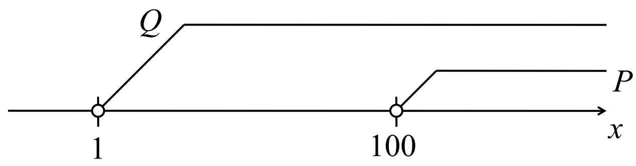
「適当な実数 x について $x^2\leq 0$」は命題であり、この命題は真である（$x=0$）。「ある実数 x について $x^2\leq 0$」、「$x^2\leq 0$ を満たす実数 x が存在する」も同じ意味である。

さらに、実数全体の集合を R として、「すべての実数 x について $x^2\geq 0$」を、記号で「$\forall x\in R; x^2\geq 0$」や「$x^2\geq 0$（$\forall x\in R$）」のように書くことがある。「適当な実数 x について $x^2\leq 0$」についても、同様の記号で「$\exists x\in R; x^2\leq 0$」、「$x^2\geq 0$（$\exists x\in R$）」のように書くことがある。

実数全体の集合を R とし、その部分集合 P 、 Q を次のように定める。

$P=\{x\in R\mid x>100\}$　（100 より大きい実数全体の集合）

$Q=\{x\in R\mid x>1\}$　（1 より大きい実数全体の集合）



この P と Q に対して、 $P\subset Q$ が成り立っている。

一般に、全体集合を U とする条件 p 、 q について、 U の部分集合で条件 p が成り立つもの全体の集合を P 、条件 q が成り立つもの全体の集合を Q とすると、命題「 $p\Rightarrow q$ 」が真であることと、 $P\subset Q$ が成り立つことは、同じことである。

命題 $p\Rightarrow q$ が偽であるとは、条件 p を満たすのに条件 q を満たさないものが存在することである。

したがって、命題 $p\Rightarrow q$ が偽であることを示すには、全体集合の要素で、 p を満たすが q を満たさない例を 1 つだけ示せばよい。このような例を反例という。

（例）

命題「 $x>1$ ならば $x>3$ 」について考える。

$x=2$ は「 $x>1$ 」を満たすが「 $x>3$ 」を満たさない。よって、この命題は偽である。

インデックスに戻る