インデックスに戻る

１４． 空間ベクトル

１４－２．空間ベクトルと座標空間の利用

１４－２－１．位置ベクトルとその利用

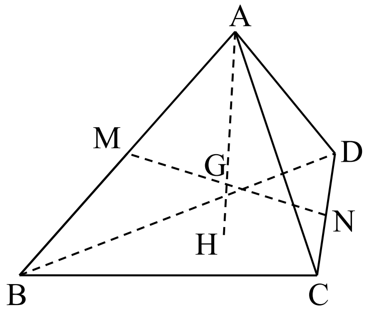
１４－２－１－２．平面上の点と位置ベクトル

3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$、$\mathrm{B}(\vec{b})$、$\mathrm{C}(\vec{c})$は同一直線上にないとする。点 P が A 、B 、C の定める平面上にあるための条件は、次の関係式を満たす実数 t 、u が存在することである。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

（例）

四面体 ABCD において、辺 AB の中点を M 、辺 CD の中点を N 、線分 MN の中点を G とする。直線 AG と平面 BCD の交点を H とするとき、 $\mathrm{AG}:\mathrm{GH}$を求めよう。



M は線分 AB の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

N は線分 CD の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

G は線分 MN の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

H は直線 AG 上にあるから、k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AG}}=k\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)=\frac{1}{4}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{4}k\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots①$$

H は平面 BCD 上にあるので、t 、u を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}+u\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=t\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+u\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-t-u)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$で表す表し方は一通りであるので、①②より

$$\frac{1}{4}k=1-t-u\text{、}\frac{1}{4}k=t\text{、}\frac{1}{4}k=u$$

この連立方程式を解くと

$$k=\frac{4}{3}\text{、}t=\frac{1}{3}\text{、}u=\frac{1}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

であり、

$$\mathrm{AG}:\mathrm{GH}=3:1$$

インデックスに戻る