インデックスに戻る

１４． 空間ベクトル
１４－１． 座標空間と空間ベクトル
１４－１－４．ベクトルの内積
１４－１－４－１．内積と成分

空間の$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$、$\vec{b}$について、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$、$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を満たすように点O、A、Bを定める。平面の場合と同様に$\angle\mathrm{AOB}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角という。また、$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとするとき、$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$を$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積といって記号で$\vec{a}\cdot\vec{b}$と書く。$\vec{a}$、$\vec{b}$の少なくとも一方が$\vec{0}$のときは、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$であり、そのなす角は考えない。

空間ベクトルの内積

$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

ただし、$\vec{a}$、$\vec{b}$の少なくとも一方が$\vec{0}$のときは、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

座標空間の$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$、$\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$について、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$、$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を満たすように点O、A、Bを定める。$\vec{a}$と$\vec{b}$の一方が他方の実数倍である場合を除くと、この3点を頂点とする三角形OABを考えることができる。$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとすると、余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$$

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

最後の関係式は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の一方が他方の実数倍になって三角形OABができない場合にも成り立つ。この関係式を成分を用いて表すと

$$\left(b_1-a_1\right)^2+\left(b_2-a_2\right)^2+\left(b_3-a_3\right)^2$$

$$=\left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2\right)+\left(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\right)-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$b_1{}^2-2a_1b_1+a_1{}^2+b_2{}^2-2a_2b_2+a_2{}^2+b_3{}^2-2a_3b_3+a_3{}^2$$

$$=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^3-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

さらに、$\vec{a}$、$\vec{b}$ が $\vec{0}$ でない場合には

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}\cos\theta$$

であるから、次のことが成り立つ。

成分とベクトルの内積・なす角

$\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$、$\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

であり、$\vec{a}$、$\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないとき、この 2 つのベクトルのなす角を θ とすれば

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}$$

（例）

$A(0,2,1)$、$B(4,3,2)$、$C(-1,-2,0)$ とする。このとき

$$\overrightarrow{AB}=(4-0,3-2,2-1)=(4,1,1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1-0,-2-2,0-1)=(-1,-4,-1)$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+1^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times(-1)+1\times(-4)+1\times(-1)=-9$$

$\angle BAC=\theta$ とすれば

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-9}{3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ より

$$\theta=120^\circ$$

インデックスに戻る