

[インデックスに戻る](#)

1. 方程式と不等式

1-3. 方程式と不等式

1-3-A. 絶対値と方程式・不等式

1-3-A-A. 絶対値と方程式

等式の左辺または右辺（あるいは両方）に絶対値記号が含まれる方程式を考えることができる。

(例)

$3|x-1| = -x+5$ は x の方程式である。 $x=2$ は解であり、 $x=3$ は解ではない。

このような方程式には、一次方程式や二次方程式の場合とは違い、機械的な解法や解の公式がない。適当な条件のもとでは、絶対値記号を含む式を絶対値記号を含まない式に書き換えることができる。

(例)

$x \geq 1$ のときは $x-1 \geq 0$ であるから、 $|x-1| = x-1$

$x < 1$ のときは $x-1 < 0$ であるから、 $|x-1| = -(x-1)$

このことを利用して、絶対値記号が含まれる方程式を絶対値記号が含まれない方程式に帰着させることができる。一次方程式や二次方程式などの解法が明らかな方程式に帰着させることができる。解くことが可能になる。

(例)

$$3|x-1| = -x+5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x \geq 1$ の場合、 $|x-1| = x-1$ であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$3(x-1) = -x+5 \quad (\leftarrow \text{これは } x \text{ の一次方程式である。})$$

$$3x-3 = -x+5$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

これは $x \geq 1$ を満たす。

$x < 1$ の場合、 $|x-1| = -(x-1)$ であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$-3(x-1) = -x+5 \quad (\leftarrow \text{これは } x \text{ の一次方程式である。})$$

$$-3x+3 = -x+5$$

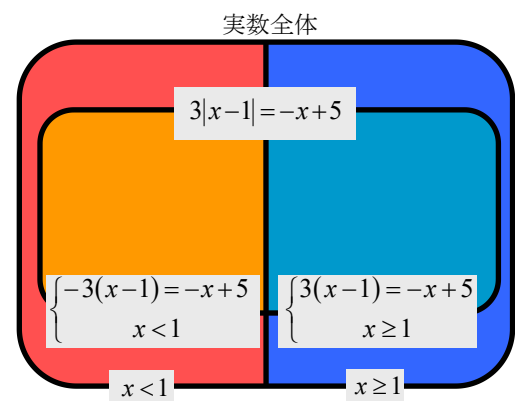
$$-2x = 2$$

$$x = -1$$

これは $x < 1$ を満たす。

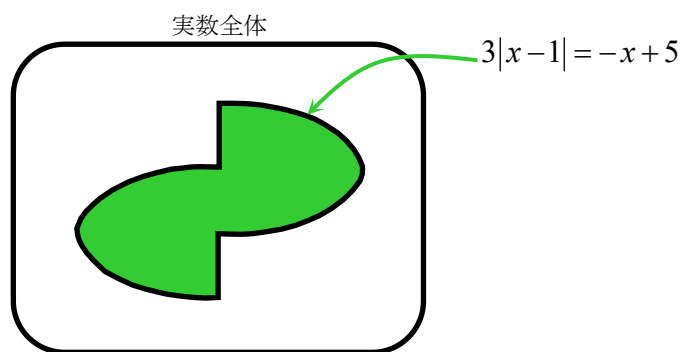
以上より、 $\textcircled{1}$ の解は

$$x = 2, -1$$

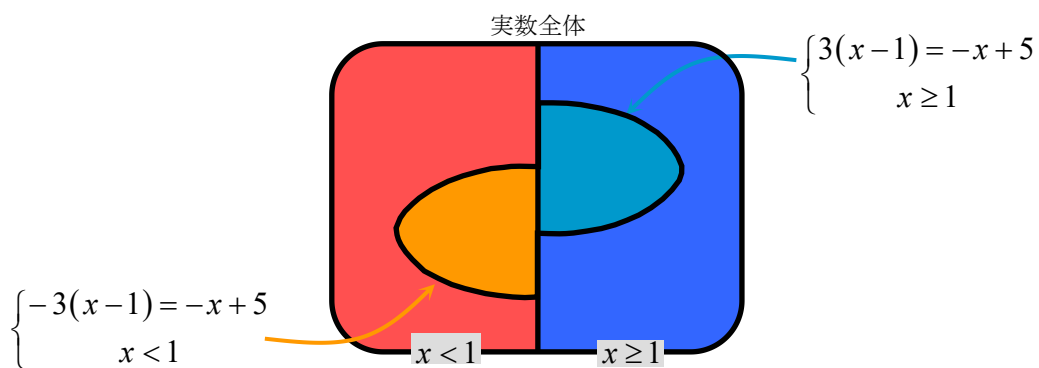


(注)

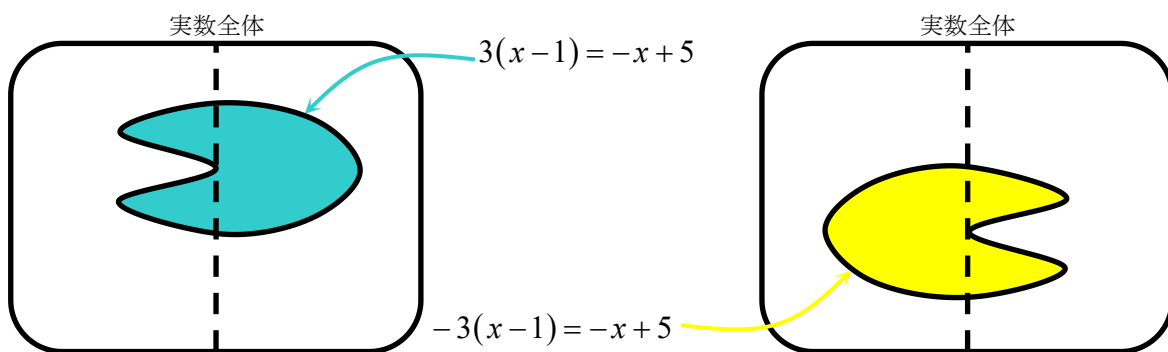
この例について、もう少し詳しく見てみましょう。 $3|x-1|=-x+5$ の解を下のような図で表してみます。



絶対値がついたままでは解けないので、 $x \geq 1$ の場合と $x < 1$ の場合に分けます。



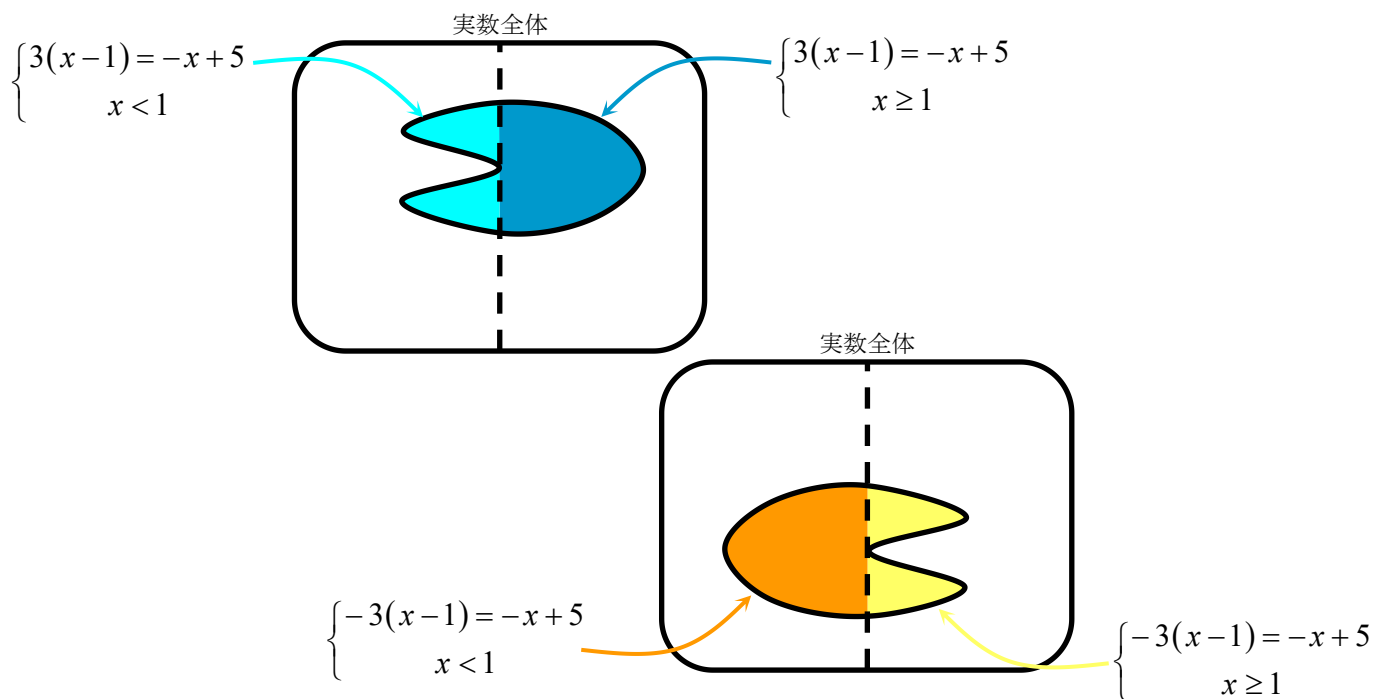
それぞれの場合に現れた方程式 $3(x-1)=-x+5$ 、 $-3(x-1)=-x+5$ を解きます。



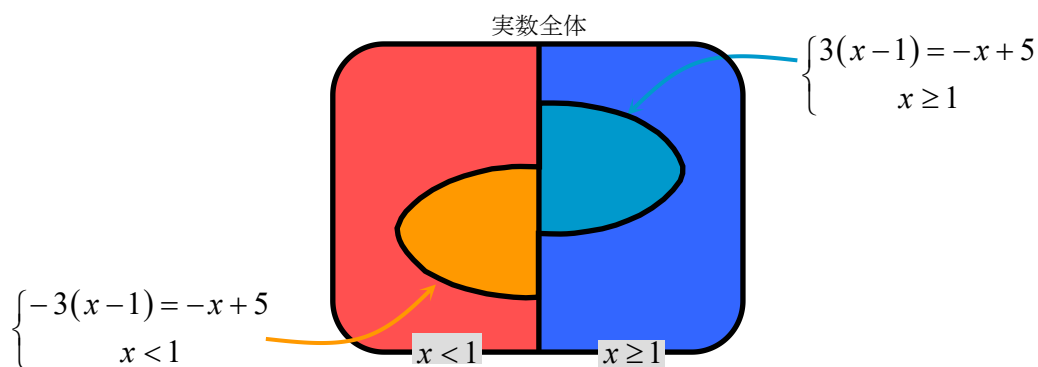
場合わけしたそれぞれについて、考えなければならないのは、

$$\begin{cases} 3(x-1) = -x+5 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{および} \quad \begin{cases} -3(x-1) = -x+5 \\ x < 1 \end{cases}$$

でした。二つの方程式 $3(x-1) = -x+5$ および $-3(x-1) = -x+5$ の解について、不等式の条件を満たしているものを拾い、不等式の条件を満たしていないものは捨てます（この場合は、二つの方程式の解は、すべて、不等式の条件を満たしていました）。



拾い上げたものをすべてあわせたものが解です。



次の例では、絶対値をはずすことによって、二次方程式に帰着されることになる。前の例と同様にして解くことができるが、二次方程式では解が複数得られる場合があるので、注意が必要である。

(例)

$$x^2 - 3 = 2|x| \quad \cdots \textcircled{1} \quad (\text{図 1})$$

$x \geq 0$ の場合、 $|x| = x$ であるから、

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &= 2x \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \\ x &= 3, -1 \end{aligned}$$

$x \geq 0$ より

$$x = 3 \quad (\text{図 2})$$

$x < 0$ の場合、 $|x| = -x$ であるから、

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &= 2(-x) \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x+3)(x-1) &= 0 \\ x &= -3, 1 \end{aligned}$$

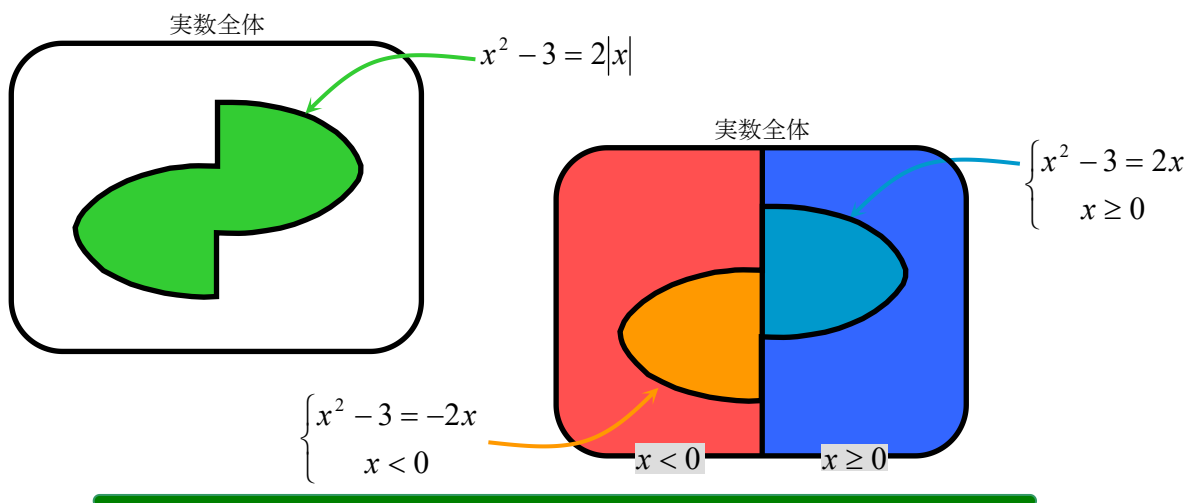
$x < 0$ より

$$x = -3 \quad (\text{図 3})$$

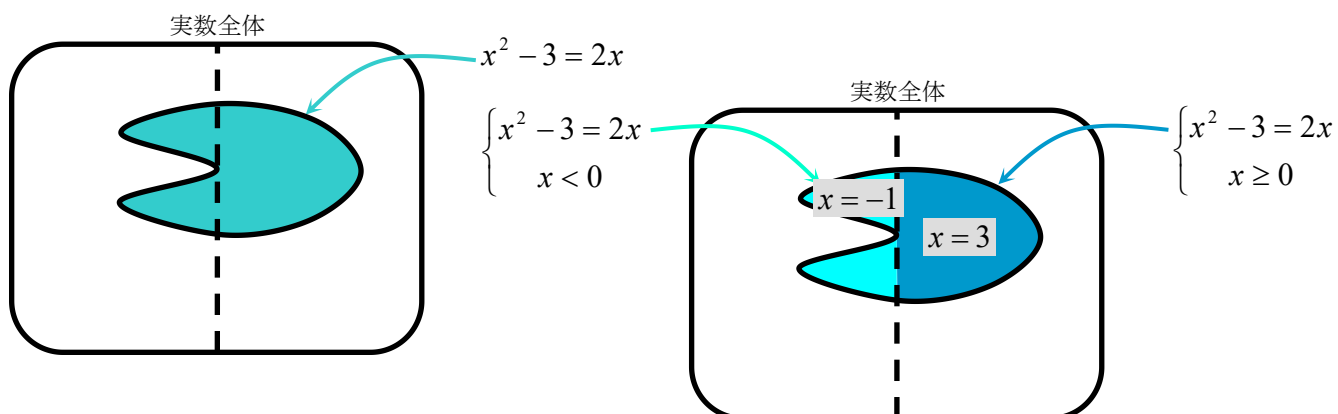
以上より①の解は、

$$x = 3, -3 \quad (\text{図 4})$$

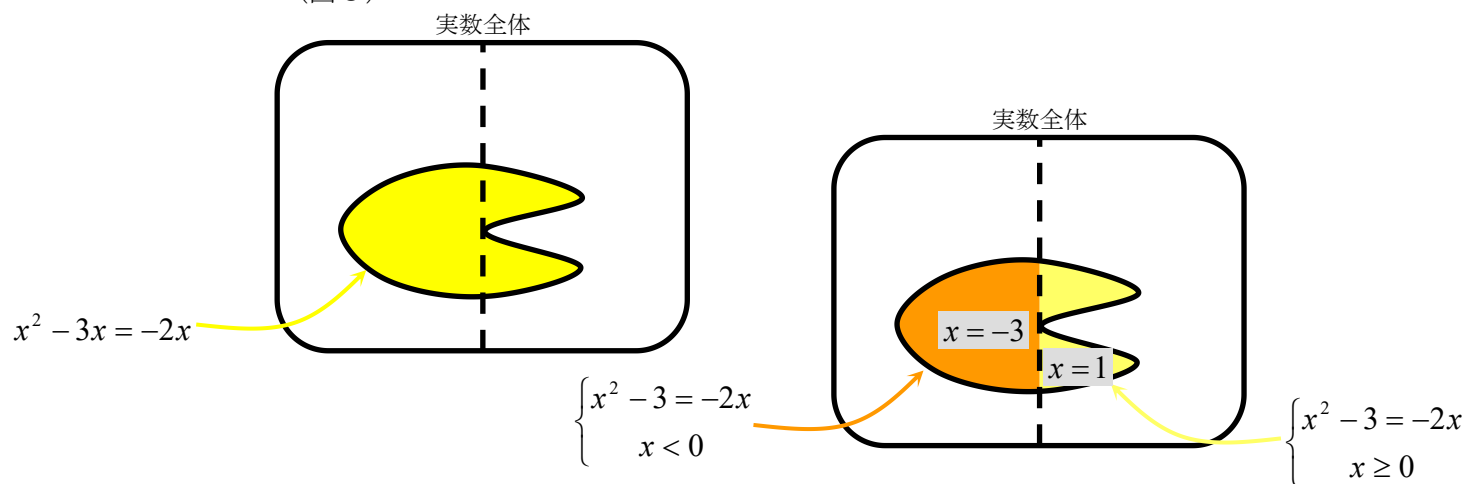
(図 1)



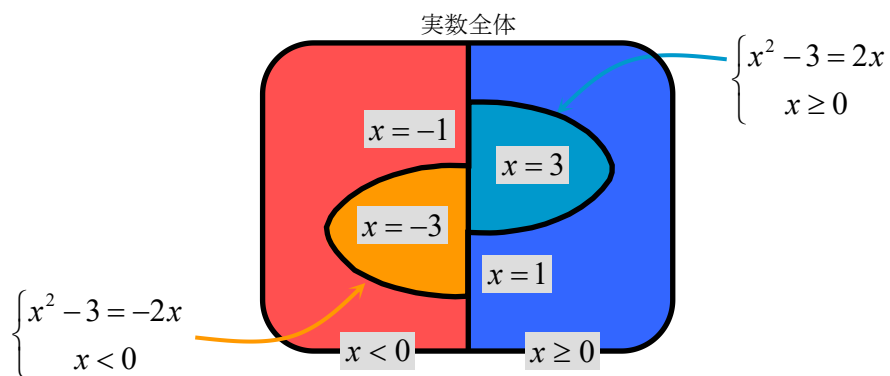
(図 2)



(図 3)



(図 4)



特殊な形の方程式については、その解がどうなるかを覚えておくとう便利である。

(定理)

c は正の定数とする。このとき、実数 t に関して

$$|t| = c \Leftrightarrow t = c \quad \text{または} \quad t = -c \quad (t = \pm c)$$

(例)

方程式 $|x| = 3$ の解は $x = \pm 3$ である。

(例)

方程式 $|x-1| = 5$ を解くと、次のようになる。

$$|x-1| = 5$$

$$x-1 = 5 \quad \text{または} \quad x-1 = -5$$

$$x = 6 \quad \text{または} \quad x = -4$$

したがって、この方程式の解は、 $x = 6, -4$

絶対値を二つ以上含む方程式でも、適当な範囲に分けることにより、解くことができる場合がある。

(例) $|x-1| + |x-2| = 3 \quad \cdots \star$

$x \geq 2$ のとき、 $x > 1$ であるから、

$$|x-1| = x-1, \quad |x-2| = x-2$$

したがって、 $\star$ より、

$$(x-2) + (x-1) = 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

これは、 $x \geq 2$ を満たす。

$1 \leq x < 2$ のとき、

$$|x-1| = x-1, \quad |x-2| = -(x-2)$$

したがって、 $\star$ より

$$(x-1) - (x-2) = 3$$

$$0 \cdot x - 2 = 0$$

これを満たす実数 x は存在しない。

$x < 1$ のとき、

$$|x-1| = -(x-1), \quad |x-2| = -(x-2)$$

したがって、 $\star$ より

$$-(x-1) - (x-2) = 3$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

これは、 $x < 1$ を満たす。

以上より、 $\star$ の解は、

$$x = 0, 3$$

(例) $||x|-2|=1 \quad \cdots \star$

・ $x \geq 0$ のとき、

$$|x| = x$$

であるから、 $\star$ より、

$$|x-2|=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

「 $x \geq 0$ かつ $x \geq 2$ 」、すなわち、 $x \geq 2$ のとき、 $|x-2|=x-2$ であるから、
 $\textcircled{1}$ より

$$x-2=1$$

$$x=3$$

これは $x \geq 2$ を満たす。

「 $x \geq 0$ かつ $x < 2$ 」、すなわち、 $0 \leq x < 2$ のとき、 $|x-2|=-(x-2)$ であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$-(x-2)=1$$

$$-x=-1$$

$$x=1$$

これは、 $0 \leq x < 2$ をみたす。

・ $x < 0$ のとき

$$|x| = -x$$

であるから、 $\star$ より

$$|-x-2|=1$$

$$|-(x+2)|=1$$

$$|x+2|=1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

「 $x < 0$ かつ $x \geq -2$ 」、すなわち、 $-2 \leq x < 0$ のとき、 $|x+2|=x+2$ であるから、 $\textcircled{2}$ より

$$x+2=1$$

$$x=-1$$

これは、 $-2 \leq x < 0$ をみたす。

「 $x < 0$ かつ $x < -2$ 」、すなわち、 $x < -2$ のとき、 $|x+2|=-(x+2)$ であるから、 $\textcircled{2}$ より

$$-(x+2)=1$$

$$-x=3$$

$$x=-3$$

これは、 $x < -2$ をみたす。

以上より、 $\star$ の解は、

$$x=-3, -1, 3, 1$$

(注)

この問題を次のように解いてもよいが、すべての問題が以下のように解けるわけではない。

$$||x|-2|=1$$

$$|x|-2=1 \quad \text{または} \quad |x|-2=-1$$

$$|x|=3 \quad \text{または} \quad |x|=1$$

$$x=\pm 3 \quad \text{または} \quad x=\pm 1$$

ゆえに、

$$x=\pm 3, \pm 1$$

[インデックスに戻る](#)