インデックスに戻る

１．方程式と不等式
１－３．方程式と不等式
１－３－２．２次方程式
１－３－２－３．２次方程式の解の公式

２次方程式を解くには、まず $ax^2+bx+c=0$　（$a\neq 0$）の形に整理する。左辺が因数分解できたならば、この二次方程式は簡単に解くことができる。左辺を因数分解できなくても、平方根の定義によって解くことができるが、その手順は煩雑になってしまうことがある。
平方根の定義によって解いた手順と同じようにすると、次の解の公式を得ることができる。

２次方程式の解の公式

$ax^2+bx+c=0$　（$a\neq 0$）は、$b^2-4ac\geq 0$ のとき解をもち、その解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

［証明］

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\quad\cdots\bigstar$$

$b^2-4ac>0$ のとき

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\cdots★★$$

$b^2-4ac=0$のときは、★より

$$x=-\frac{b}{2a}$$

このとき、解は１個であるが、それは★★によって得られる。

［証明おわり］

注

$b^2-4ac<0$の場合、★を満たす実数xは存在しないので、この２次方程式は実数の解を持たないことがわかる。

例

$$3x^2+x-1=0$$

解の公式により

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot(-1)}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$$

例

$$3x^2-5x+2=0$$

解の公式により

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm1}{6}$$

したがって

$$x=\frac{5-1}{6},\frac{5+1}{6}$$

$$x=\frac{4}{6},\frac{6}{6}$$

$$x=\frac{2}{3},1$$

（この２次方程式は左辺を因数分解することで解くこともできる。）

インデックスに戻る