

[インデックスに戻る](#)

1. 方程式と不等式

1-1. 式の計算

1-1-3. 因数分解

1-1-3-a. 同次式と対称式・交代式

$f(a,b)$ を a と b の多項式とし、その次数を n とする。 $f(a,b)$ のすべての項の次数が n であるとき、 $f(a,b)$ を n 次の同次式であるという。

例

$2a+3b$ は 1 次の同次式である ($2a$ 、 $3b$ とともに 1 次)。 a^2+2b は同次式でない (a^2 は 2 次、 $2b$ は 1 次)。

$f(a,b)=a^3+2a^2b-3b^3$ とする。 $f(a,b)$ は 3 次の同次式である。 a 、 b を 2 倍すると a^3 、 $2a^2b$ 、 $-3b^3$ はすべて 8 倍になるので、 $f(a,b)$ の値も 8 倍になる。記号で表せば、 $f(2a,2b)=2^3 f(a,b)$ である。一般に次の等式が成立する。

$f(a,b)$ が n 次の同次式ならば、

$$f(ra,rb)=r^n f(a,b)$$

また、この逆も成り立つ。

定理

多項式 $f(a,b)$ が次の等式を満たすならば、 $f(a,b)$ は n 次の同次式である。

$$f(ra,rb)=r^n f(a,b)$$

[証明]

k 次の多項式 $f(a,b)$ が次の等式を満たすとする。

$$f(ra,rb)=r^n f(a,b) \quad \cdots \star 1$$

$f(a,b)$ の j 次 ($0 \leq j \leq k$) の項だけを足し合わせてできる多項式を $A_j(a,b)$ とする。

このとき、 $f(a,b)$ は次の式で表される。

$$f(a,b)=A_0(a,b)+A_1(a,b)+\cdots+A_j(a,b)+\cdots+A_k(a,b)$$

そして、 $A_j(a,b)$ は j 次の同次式であるから、次の等式が成り立つ。

$$A_j(ra, rb) = r^j A_j(a, b)$$

したがって、

$$f(ra, rb) = A_0(a, b) + rA_1(a, b) + \cdots + r^j A_j(a, b) + \cdots + r^k A_k(a, b) \quad \cdots \star 2$$

$f(ra, rb)$ は r 、 a 、 b の多項式である。 $\star 2$ は、 $f(ra, rb)$ を r に着目して整理したものと同じと見ることができる。 $\star 1$ についても同様である。 $\star 1$ の右辺と $\star 2$ の右辺が等しいから、次数を比較することにより

$$n = k$$

であることがわかり、さらに、

$$A_k(a, b) = f(a, b), \quad A_0(a, b) = A_1(a, b) = \cdots = A_{k-1}(a, b) = 0$$

となるから、

$$f(a, b) = A_n(a, b)$$

$A_n(a, b)$ は n ($=k$) 次の同次式であるから、 $f(a, b)$ も n 次の同次式である。

同次式どうしの積はまた同次式である。

定理

$f(a, b)$ を l 次の同次式、 $g(a, b)$ を m 次の同次式であるとする。このとき $f(a, b)$ と $g(a, b)$ の積で作られる多項式 $f(a, b)g(a, b)$ は $(l+m)$ 次の同次式である。

[証明]

$h(a, b) = f(a, b)g(a, b)$ とする。 $f(a, b)$ 、 $g(a, b)$ は同次式であるから

$$\begin{aligned} h(ra, rb) &= f(ra, rb)g(ra, rb) \\ &= r^l f(a, b) \cdot r^m g(a, b) \\ &= r^{l+m} f(a, b)g(a, b) \\ &= r^{l+m} h(a, b) \end{aligned}$$

したがって、 $h(a, b)$ は $(l+m)$ 次の同次式である。

同次式が因数分解できる場合、因数もまた同次式になる。

定理

$f(a, b)$ を n 次の同次式とする。さらに、多項式 $g(a, b)$ 、 $h(a, b)$ に対して

$$f(a, b) = g(a, b)h(a, b)$$

が成り立っているものとする。このとき、 $g(a, b)$ 、 $h(a, b)$ は同次式である。

[証明]

$f(a, b)$ を n 次の同次式とする。さらに、多項式 $g(a, b)$ 、 $h(a, b)$ に対して

$$f(a,b)=g(a,b)h(a,b) \quad \cdots \star 1$$

が成り立っているとする。★1より

$$f(ra,rb)=g(ra,rb)h(ra,rb) \quad \cdots \star 2$$

$g(ra,rb)$ 、 $h(ra,rb)$ は a 、 b 、 r の多項式である。 $f(a,b)$ は n 次の同次式であったから

$$f(ra,rb)=r^n f(a,b) \quad \cdots \star 3$$

★2、★3より

$$g(ra,rb)h(ra,rb)=r^n f(a,b) \quad \cdots \star 4$$

したがって、左辺は r^n を因数に持つ。 r は一次の多項式でこれ以上は因数分解できないので、ある自然数 k に対して、次のことがいえる。

$$g(ra,rb)はr^kを因数にもち、h(ra,rb)はr^{n-k}を因数にもつ。(0 \leq k \leq n)$$

このことを用いると、 $g(ra,rb)$ 、 $h(ra,rb)$ は a 、 b 、 r の多項式 $G(a,b,r)$ 、 $H(a,b,r)$ を用いて、次のように表すことができる。

$$g(ra,rb)=r^k G(a,b,r)、h(ra,rb)=r^{n-k} H(a,b,r) \quad \cdots \star 5$$

★4、★5より

$$r^n G(a,b,r)H(a,b,r)=r^n f(a,b)$$

$$G(a,b,r)H(a,b,r)=f(a,b) \quad \cdots \star 6$$

★6の両辺を r の多項式とみると、右辺は定数である。定数は次数が1以上の二つの多項式には因数分解できないから、左辺の $G(a,b,r)$ 、 $H(a,b,r)$ はともに定数である。すなわち、 $G(a,b,r)$ 、 $H(a,b,r)$ はともに r を含まない多項式である。

$$G(a,b,r)=P(a,b)、H(a,b,r)=Q(a,b) \quad \cdots \star 7$$

($P(a,b)$ 、 $Q(a,b)$ は a と b の多項式)

★5、★7より

$$g(ra,rb)=r^k P(a,b)、h(ra,rb)=r^{n-k} Q(a,b) \quad \cdots \star 8$$

★8に $r=1$ を代入すると

$$g(a,b)=P(a,b)、h(a,b)=Q(a,b) \quad \cdots \star 9$$

★8、★9より

$$g(ra,rb)=r^k g(a,b)、h(ra,rb)=r^{n-k} h(a,b)$$

したがって、 $g(a,b)$ は k 次の同次式、 $h(a,b)$ は $(n-k)$ 次の同次式である。

例 $x^2 - xy - 2y^2$ の因数分解

$x^2 - xy - 2y^2$ は 2 次の同次式である。したがって、因数分解ができるとすれば、因数も同次式となる。 $x^2 - xy - 2y^2$ は 2 次式であるから、因数の次数は 1 に限られる。したがって、因数分解ができるとすれば、1 次の同次式の積の形、すなわち、

$$(ax + by)(cx + dy)$$

の形に限られる。 $x^2 - xy - 2y^2$ を x に着目しながら、因数分解の公式を用いるには、和が $-y$ 、積が $-2y^2$

であるような 2 数 (2 式) を探すのであったが、上の検討により、積が $-2y^2$ になる 2 数のうち、1 と $-2y^2$ などは候補にはならない。候補になるのは、 $-y$ と $2y$ 、 y と $-2y$ の二組に限られる。このうち和が $-y$ になるのは、 y と $-2y$ であるから、因数分解を行うと、

$$x^2 - xy - 2y^2 = (x + y)(x - 2y)$$

になる。このように、同次式の性質を用いると、因数分解が簡単になる場合がある。

注

ここまでの同次式の性質を、 a と b の 2 文字の同次式で説明したが、3 文字以上の同次式に関しても同様である。

$f(a,b)$ を a と b の多項式とする。 $f(a,b)$ において a と b を入れ替えて得られる式 $f(b,a)$ が $f(a,b)$ と変わらないとき、 $f(a,b)$ を対称式という。

例

$2a+3b$ 、 $a^2+ab+2b^2$ は対称式ではない。 $3a+3b$ 、 $2a^2+3ab+2b^2$ は対称式である。

$f(a,b)$ が a と b の対称式であるとする。 $k \neq l$ のとき、 $a^k b^l$ の係数と $a^l b^k$ の係数は一致する。したがって、

a と b の一次の対称式の一般形は

$$pa + pb$$

a と b の二次の対称式の一般形は

$$pa^2 + qab + pb^2 + ra + rb + s$$

a と b の三次の対称式の一般形は

$$pa^3 + qa^2b + qab^2 + pb^3 + ra^2 + sab + rb^2 + ta + tb + u$$

(p 、 q 、 r 、 s 、 t 、 u は定数)

a と b の和、積を表した多項式 $a+b$ 、 ab は対称式である。この二つの対称式を「基本対称式」という。
一般に、対称式はこの基本対称式 (の多項式) で表すことができる。

[証明]

$f(a,b)$ は a と b の対称式であるとする。 $k \neq l$ のとき $a^k b^l$ の係数と $a^l b^k$ の係数は一致する。したがって、 $f(a,b)$ は $a^k b^l$ と $a^l b^k$ をその係数でくくった $A(a^k b^l + a^l b^k)$ という形の式と $Ba^m b^m$ という形の式の和として表すことができる。

例

二次であれば

$$pa^2 + qab + pb^2 + ra + rb + s = p(a^2 + b^2) + qab + r(a+b) + s$$

三次であれば

$$p(a^3 + b^3) + q(a^2b + ab^2) + r(a^2 + b^2) + t(a+b) + sab + u$$

$Ba^m b^m$ の形をした式については、指数法則より

$$Ba^m b^m = B(ab)^m$$

であるから、積 ab だけで表すことができる。 $A(a^k b^l + a^l b^k)$ の形をした式については、 $k > l$ であるとする ($k < l$ の場合も同様)

$$A(a^k b^l + a^l b^k) = Aa^l b^l (a^{k-l} + b^{k-l}) = A(ab)^l (a^{k-l} + b^{k-l})$$

と変形できるから、 $a^n + b^n$ の形の式が、基本対称式 $a+b$ 、 ab で表せることを示せばよい。以下では、このことを数学的帰納法（「数列」の項目参照）で示す。

I

$n=1$ のときは自明。

$$n=2 \text{ のときは } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

II

$n=k$ 、 $n=k+1$ のとき $a^n + b^n$ が基本対称式 $a+b$ 、 ab で表せると仮定する。すなわち、ある多項式 $F(x, y)$ 、 $G(x, y)$ が存在して

$$a^k + b^k = F(a+b, ab), \quad a^{k+1} + b^{k+1} = G(a+b, ab)$$

が成り立っているとする。次の等式が成り立つことは、右辺を展開することで証明できる（省略）。

$$a^{k+2} + b^{k+2} = (a+b)(a^{k+1} + b^{k+1}) - ab(a^k + b^k)$$

したがって、

$$a^{k+2} + b^{k+2} = (a+b) \cdot G(a+b, ab) - (ab) \cdot F(a+b, ab)$$

右辺は $x=a+b$ 、 $y=ab$ とすれば x と y の多項式であるから、 $a^{k+2} + b^{k+2}$ が $a+b$ 、 ab （の多項式）で表すことができる。

I、IIより、すべての自然数 n について、「 $a^n + b^n$ は基本対称式 $a+b$ 、 ab （の多項式）で表すことができる。」ことが示された。

例

$$a^2 + b^2 + 2a + 2b = (a+b)^2 + 2(a+b) - 2ab$$

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = (a+b)^3 - 2ab(a+b)$$

実際に、対称式を基本対称式で表したい場合には、以下の等式を覚えておくと便利である。

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

これに相当する4次、5次の等式は複雑であるので、覚えなくてもよいだろう。

$$a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4ab(a+b)^2 + 2(ab)^2$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)^5 - 5ab(a+b)^3 + 5(ab)^2(a+b)$$

例

$$a^2 + ab + b^2 = \{(a+b)^2 - 2ab\} + ab = (a+b)^2 - ab$$

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) = (a+b)^3 - 4ab(a+b)$$

a 、 b についての2つの対称式を考えると、それらの和・差・積も、対称式である。対称式の因数分解については、次のことがいえる。

定理

$f(a,b)$ を対称式とする。 $f(a,b)$ が $g(a,b)$ を因数に持つとき、 $g(b,a)$ も $f(a,b)$ の因数である。

〔証明〕

$f(a,b)$ を対称式とし、 $f(a,b)$ が $g(a,b)$ を因数に持つとする。多項式 $h(a,b)$ を用いて

$$f(a,b) = g(a,b)h(a,b) \quad \cdots \star 1$$

と表すことができる。 $f(a,b)$ は対称式であるから、

$$f(b,a) = f(a,b) \quad \cdots \star 2$$

が成り立つ。 $\star 1$ より

$$f(b,a) = g(b,a)h(b,a) \quad \cdots \star 3$$

$\star 2$ と $\star 3$ より

$$f(a,b) = g(b,a)h(b,a)$$

ゆえに、 $f(a,b)$ は $g(b,a)$ を因数に持つ。

この定理は、 $g(a,b)$ が対称式の場合は意味がない。 $g(a,b)$ が対称式でない場合は $g(a,b)$ と $g(b,a)$ が異なるので、 $g(a,b)$ という因数が一つ見つければ $g(b,a)$ という2つ目の因数も見つけることができることになる。

文字が3個の場合にも対称式を考える。 a 、 b 、 c の多項式 $f(a,b,c)$ が次の関係式を満たすとき、 $f(a,b,c)$ を対称式という。

$$f(a,b,c) = f(a,c,b) = f(c,b,a) = f(b,a,c)$$

(a 、 b 、 c のうち、どの2つを入れ替えても式が変わらない。)

$f(a,b,c)$ が対称式のとき、

$$f(a,b,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b)$$

が成り立つことも明らかである。

文字が3個の対称式も、文字2個の対称式と同様の性質を持つ。 $a+b+c$ 、 $bc+ca+ab$ 、 abc は対称式である。これらを基本対称式という。文字が3個の場合も対称式は基本対称式(の多項式)で表すことができるが、証明は複雑である(省略)。

a 、 b 、 c についての2つの対称式を考えると、それらの和・差・積は、対称式である。因数分解については次のことがいえる。

$f(a,b,c)$ を対称式とする。 $f(a,b,c)$ が $g(a,b,c)$ を因数に持つとき、 $g(a,c,b)$ 、 $g(b,a,c)$ 、 $g(b,c,a)$ 、 $g(c,a,b)$ 、 $g(c,b,a)$ も $f(a,b,c)$ の因数である。

証明は文字が2個の場合と同様である。

多項式 $f(a,b)$ が次の関係式を満たすとき、 $f(a,b)$ を交代式という。

$$f(b,a) = -f(a,b)$$

(2つの文字を入れ替えると-1倍になる。)

例

$a^2 - 2b^2$ は交代式ではない。 $a^2 - b^2$ は交代式である。

2つの交代式の和、差は交代式である。2つの交代式の積は対称式である。交代式と対称式の積は交代式である。交代式の因数分解については、次のことが成り立つ。

定理

$f(a,b)$ を交代式とする。 $f(a,b)$ は $a-b$ を因数に持つ。

$$f(a,b) = (a-b)g(a,b)$$

と表すとき、 $g(a,b)$ は対称式である。

[証明]

$$f(b,a) = -f(a,b) \quad \cdots \star 1$$

に a に b を代入すると

$$f(b,b) = -f(b,b)$$

$$f(b,b) + f(b,b) = 0$$

$$2f(b,b) = 0$$

$$f(b,b) = 0 \quad \cdots \star 2 \quad (\text{同様に } f(a,a) = 0)$$

$f(a,b)$ を a の多項式とみて、因数定理(「複素数と方程式」の項目参照)を適用することにより、 $f(a,b)$ が $a-b$ を因数に持つことがわかる。そこで

$$f(a,b) = (a-b)g(a,b) \quad \cdots \star 3$$

と表すことができる。 $\star 3$ より

$$f(b,a) = (b-a)g(b,a)$$

$$f(b,a) = -(a-b)g(b,a) \quad \cdots \star 4$$

$\star 1$ と $\star 4$ より

$$-f(a,b) = -(a-b)g(b,a)$$

$$f(a,b) = (a-b)g(b,a) \quad \cdots \star 5$$

$\star 3$ と $\star 5$ より

$$(a-b)g(a,b) = (a-b)g(b,a)$$

したがって(因数分解の一意性により)

$$g(a,b) = g(b,a)$$

すなわち、 $g(a,b)$ は対称式である。

文字が3個の交代式を考えることもできる。

$f(a,b,c)$ を多項式とする。次の関係式が成り立つとき、 $f(a,b,c)$ を交代式という。

$$f(a,c,b)=f(c,b,a)=f(b,a,c)=-f(a,b,c)$$

(3個の文字のうち2個を入れ替えると-1倍になる。)

文字が3個の交代式の性質は、文字が2個の交代式の性質と同様である。2つの交代式の和、差は交代式であり、2つの交代式の積は対称式である。交代式と対称式の積は交代式である。

交代式 $f(a,b,c)$ は次の形に因数分解できる。

$$f(a,b,c)=(b-c)(c-a)(a-b)g(a,b,c) \quad (g(a,b,c) \text{は対称式})$$

証明も同様であるので省略する。

因数分解をするとき、交代式の性質を利用すると簡単にできる場合がある。

例 $(b-c)a^2+(c-a)b^2+(a-b)c^2$ の因数分解

$$f(a,b,c)=(b-c)a^2+(c-a)b^2+(a-b)c^2$$

とする。 $f(a,b,c)$ は交代式である。したがって、

$$f(a,b,c)=(b-c)(c-a)(a-b)g(a,b,c) \quad (g(a,b,c) \text{は対称式})$$

$f(a,b,c)$ は3次式、 $(b-c)(c-a)(a-b)$ は3次式であるので、 $g(a,b,c)$ は定数である。 a^2b の係数を比較することにより

$$g(a,b,c)=-1$$

したがって

$$f(a,b,c)=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

例 $(b-c)a^3+(c-a)b^3+(a-b)c^3$ の因数分解

$$f(a,b,c)=(b-c)a^3+(c-a)b^3+(a-b)c^3$$

とする。 $f(a,b,c)$ は交代式である。したがって、

$$f(a,b,c)=(b-c)(c-a)(a-b)g(a,b,c) \quad (g(a,b,c) \text{は対称式})$$

$f(a,b,c)$ は4次式、 $(b-c)(c-a)(a-b)$ は3次式であるので、 $g(a,b,c)$ は1次式である。さらに、 $f(a,b,c)$ は4次の同次式であるから、 $g(a,b,c)$ も同次式である。

以上より、 $g(a,b,c)$ は

$$g(a,b,c)=k(a+b+c) \quad (k \text{は定数})$$

の形に限られる。したがって

$$f(a,b,c)=k(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

a^3b の係数を比較することにより

$$k=-1$$

ゆえに

$$f(a,b,c)=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$