インデックスに戻る

# １．方程式と不等式
## １－１．式の計算
### １－１－３．因数分解
#### １－１－３－４．いろいろな因数分解

複雑な式の因数分解をする場合、その式の特徴に応じて、式の変形や文字の置き換えを行うと、因数分解の公式が利用できたり、簡単に因数分解が行えることがある。

因数分解する式の項の数が多い場合、それらの項をいくつかのグループに分けると、共通因数が見つけられたり、因数分解の公式が利用できる場合がある。

例　$x^3+x^2-4x-4$ の因数分解

$$\begin{aligned} x^3+x^2-4x-4 &= \left(x^4+x^3\right)+(-4x-4) \\ &= x^2(x+1)-4(x+1) \\ &= \left(x^2-4\right)(x+1) \\ &= (x-2)(x+2)(x+1) \end{aligned}$$

注

通常、因数分解は可能な限り次数の低い多項式の因数に分ける。上の例でいうと

$$x^3+x^2-4x-4=\left(x^2-4\right)(x+1)$$

では、不十分で

$$x^3+x^2-4x-4=(x-2)(x+2)(x+1)$$

で因数分解が完了した、とすることが多い。また、因数分解したときに、その式の因数から $1$ や $-1$ でない整数をくくり出せて、残りが整数係数の多項式になっている場合は、定数をくくり出したもので、因数分解が完了したと考えるのが普通のようである。たとえば、

$$(x-1)(2x+2)=2(x-1)(x+1)$$

のようにする。

例　$x^2-y^2+2x+1$ の因数分解

$$\begin{aligned} x^2-y^2+2x+1 &= \left(x^2+2x+1\right)-y^2 \\ &= (x+1)^2-y^2 \\ &= \{(x+1)+y\}\{(x+1)-y\} \\ &= (x+1+y)(x+1-y) \\ &= (x+y+1)(x-y+1) \end{aligned}$$

式の形に応じた置き換えも有効である。

例　$(x+3)^2-(x+3)-2$ の因数分解

$X=x+3$ とする。

$$
\begin{aligned}
(x+3)^2-(x+3)-2 &= X^2-X-2 \\
&=(X-2)(X+1) \\
&=\{(x+3)-2\}\{(x+3)+1\} \\
&=(x+1)(x+4)
\end{aligned}
$$

複数の文字が含まれる式の因数分解では、一つの文字に着目し、式を整理してから考えると因数分解ができる場合がある。普通、因数分解は次数が低い式ほど簡単なので、着目する文字を選ぶときには、どの文字に着目すると次数が低くなるかを考えて選ぶ。

例　$x^2+ax+2x+a+1$ の因数分解

$x$ に着目して整理すると $x^2+(a+2)x+a+1$ であるから、$x$ の二次式

$a$ に着目して整理すると $(x+1)a+x^2+2x+1$ であるから、$a$ の一次式

次数が低くなるのは、$a$ に着目した場合である。

$$
\begin{aligned}
x^2+ax+2x+a+1 &= (x+1)a+\left(x^2+2x+1\right) \\
&=(x+1)a+(x+1)^2 \\
&=(x+1)(a+x+1)
\end{aligned}
$$

注　$x$ に着目して因数分解を行うと次のようになる。（次項参照）

$$
\begin{aligned}
x^2+ax+2x+a+1 &= x^2+(a+2)x+a+1 \\
&=x^2+\{(a+1)+1\}+(a+1)\cdot 1 \\
&=(x+1)\{x+(a+1)\} \\
&=(x+1)(x+a+1)
\end{aligned}
$$

このように、どちらの文字に着目しても因数分解が実行できる場合もある。

どちらの文字に着目しても、次数が 2 以上なる場合は、複雑である。ある文字に着目して次数が 2 になる場合は、公式が利用できる場合がある。

例　$x^2+3ax+2a^2+2x+3a+1$ の因数分解

$x$ に着目すると 2 次式、$a$ に着目しても 2 次式である。この例では、どちらに着目しても因数分解できるが、以下では $x$ に着目して行う。

$$\begin{aligned} x^2+3ax+2a^2+2x+3a+1 &= x^2+(3a+2)x+\left(2a^2+3a+1\right) \\ &= x^2+\{(2a+1)+(a+1)\}x+(2a+1)(a+1) \\ &= (x+2a+1)(x+a+1) \end{aligned}$$

例　$2x^2+3ax+a^2+4x+3a+2$ の因数分解

$$\begin{aligned} 2x^2+3ax+a^2+4x+3a+2 &= 2x^2+(3a+4)x+\left(a^2+3a+2\right) \\ &= 2\cdot 1x^2+\{2\cdot(a+1)+1\cdot(a+2)\}x+(a+2)(a+1) \\ &= \{2x+(a+2)\}\{x+(a+1)\} \\ &= (2x+a+2)(x+a+1) \end{aligned}$$

文字が 3 個以上含まれていて、どの文字に着目しても次数が 2 以上の式の因数分解は、複雑であるが、上と同じように考えていって、因数分解を行う式・因数の次数を下げていくと、うまく因数分解できる場合がある。

例　$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ の因数分解

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

（まず、$a$ に着目して整理する。）

$=(b+c)a^2+\left(b^2+c^2+2bc\right)a+\left(b^2c+bc^2\right)$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$

（次に $\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$ の部分の因数分解を考える。$a$ に着目したまま行ってもよいが、$b$ に着目すると一次式になる。）

$=(b+c)\left\{(a+c)b+\left(a^2+ac\right)\right\}$

$=(b+c)\{(a+c)b+a(a+c)\}$

$=(b+c)(a+c)(b+a)$

（このままでもよいが、バランスよく書き換える。下の式では、「しりとり」のように文字が並んでいる。）

$=(b+c)(c+a)(a+b)$

インデックスに戻る