

[インデックスに戻る](#)

1. 方程式と不等式

1-1. 式の計算

1-1-3. 因数分解

1-1-3-2. 2次式の因数分解

展開は分配法則を用いれば必ずできるが、因数分解は必ずしもできるとは限らないし、できる場合についても、その方法を見出すことは容易ではない。ここでは、展開の公式が逆に利用できる場合の因数分解を考える。次に記す因数分解の公式は、展開の公式の左辺と右辺を入れ替えたものである。

因数分解の公式

$$\begin{array}{l} 1 \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ \quad \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \\ 2 \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ 3 \quad x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \end{array}$$

※ 展開の公式の証明がしてあれば、因数分解の公式の証明は必要ない。

例

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = (x-2y)^2$$

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + 2 \cdot 3 = (x+2)(x+3)$$

注

上の $x^2 + 5x + 6$ の因数分解を行うには、和が 5、積が 6 になる 2 数を探す。この際、積の値に注目して探すと、うまく見つけることができる場合が多い。

6 の正の約数は 1、2、3、6 の 4 個

→ 6 を整数の積の形で表すと

$$6 = 1 \times 6, \quad 6 = 2 \times 3, \quad 6 = (-1) \times (-6), \quad 6 = (-2) \times (-3)$$

→ このうち和が 5 であるものは、2 と 3

例 $x^2 + xy - 2y^2$ の因数分解

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 2y^2 &= x^2 + (2y - y)x + 2y \cdot (-y) \\ &= (x + 2y)(x - y) \end{aligned}$$

注 $x^2 + axy + by^2$ の形の式の因数分解

上の例と $x^2 + x - 2$ の因数分解を比較してみよう。

$$x^2 + xy - 2y^2 = (x + 2y)(x - y), \quad x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

この二つの等式を見比べると、係数の並びが一致していることがわかる。

$x^2 + axy + by^2$ の形の式の因数分解は次のようにすると考えやすいことが多い。

$x^2 + axy + by^2$ の y を無視した式 $x^2 + ax + b$ を考える。

→ $x^2 + ax + b$ を因数分解する。

→ $x^2 + ax + b$ を因数分解したものに y を書き加える。

→ 公式に当てはめてみて確認する。計算式を書く場合は、これを書く。

因数分解の公式

$$4 \quad (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

例 $6x^2 + 5x - 4$ の因数分解

$$\begin{aligned} 6x^2 + 5x - 4 &= 2 \cdot 3x^2 + \{2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3\}x + (-1) \cdot 4 \\ &\quad (\text{上の公式で } a = 2, b = -1, c = 3, d = 4) \\ &= (2x - 1)(3x + 4) \end{aligned}$$

注

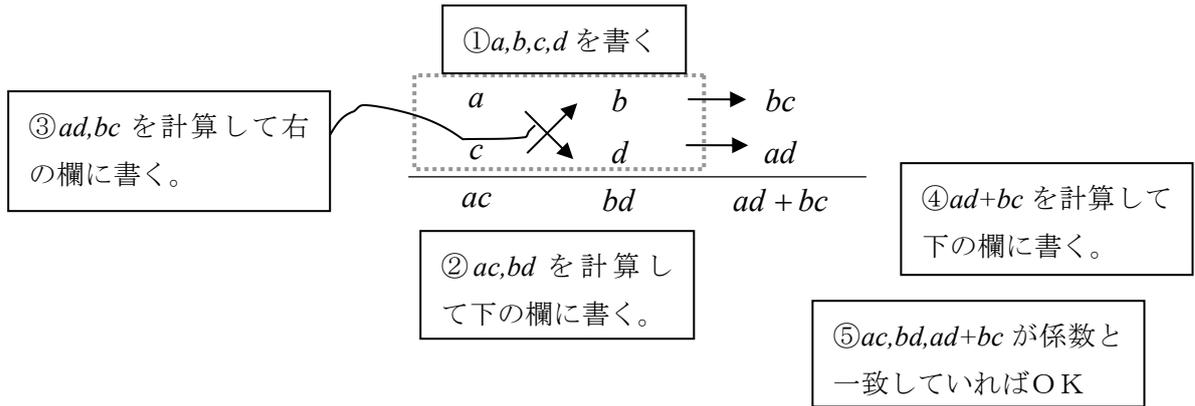
$6x^2 + 5x - 4$ の因数分解では次のようにして、 a, b, c, d の値を決定する。

$ac = 6, bd = -4$ を満たす a, b, c, d の値の組を一組選ぶ。見当がつかなければ、どれでもよい。

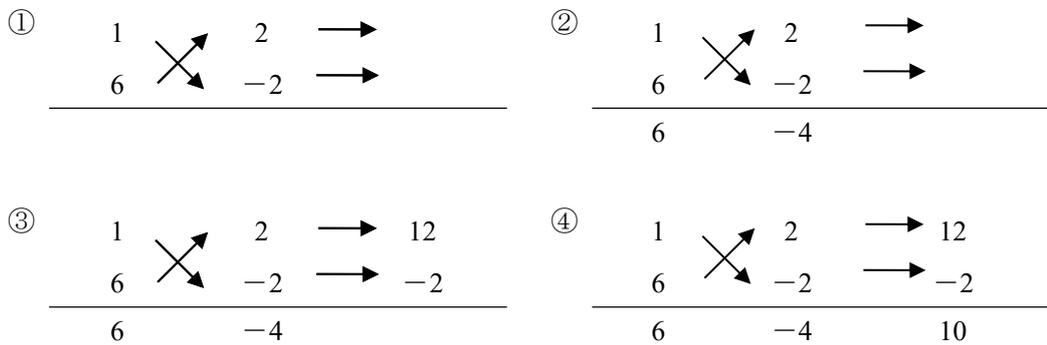
→ 選んだ組に関して、 $ad + bc$ の値を計算する。

→ $ad + bc = 5$ が満たされていればOK。満たされていなければ、 a, b, c, d の値の組を選び直し、 $ad + bc = 5$ を満たすものが見つかるまで繰り返す。

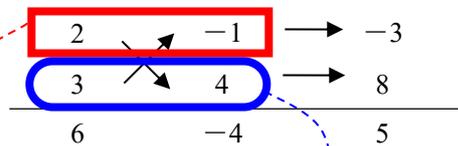
a, b, c, d の値の組を選んだのち、 $ad + bc$ の値を計算するのに次のように書いて計算すると便利である。この計算、および、この計算を用いた因数分解を、俗に、「たすきがけ」ということがある。



※②と③は逆でもよい。また、②を省略してもよい。



⑤ $6x^2 + 5x - 4$ の一次の係数5と $ad + bc$ が一致していないので、ダメ！



これは $6x^2 + 5x - 4$ の一次の係数5と $ad + bc$ が一致しているのでOK！因数分解すると

$$6x^2 + 5x - 4 = (2x - 1)(3x + 4)$$

例

$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$

2	1	→	1
1	-1	→	-2
2	-1		-1
			OK!

$3x^2 - x - 4 = (3x - 4)(x + 1)$

3	4	→	4
1	-1	→	-3
3	-4		1
			ダメ！ (符号?)

3	-4	→	-4
1	1	→	3
2	-4		-1
			OK!