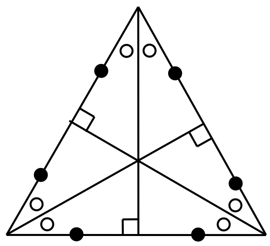
インデックスに戻る

６．平面図形

６－１．三角形の性質

６－１－２．外心・内心・重心

６－１－２－４．正三角形

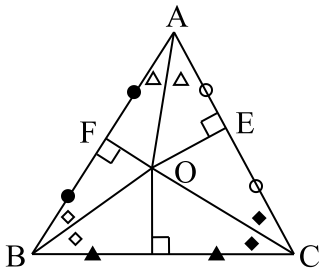


正三角形の角の二等分線は、向かい側の辺の垂直二等分線であり、中線でもある。したがって、正三角形の内心、外心、重心は一致する。

この逆について調べる。

三角形の内心と外心が一致すれば、その三角形は正三角形である。

［証明］



三角形ABCにおいて、その外心をOとし、同時にOは内心でもあるとする。

辺ABの中点を中点をF、辺ACの中点を中点をEとする。三角形AOFと三角形AOEにおいて、点Oが三角形ABC外心であることより

$\angle AFO = \angle AEO = 90°$　…①

点Oが三角形ABCの内心であることより

$\angle FAO = \angle EAO$　…②

共通だから

$AO = AO$　…③

①②③より、

$\triangle AOF \equiv \triangle AOE$

よって

$AF = AE$　…④

点F、Eは、それぞれ、辺AB、ACの中点であるから、

$AB = 2AF$、$AC = 2AE$　…⑤

④⑤より

$AB = AC$　…⑥

同様にして

$CA = BC$　…⑦

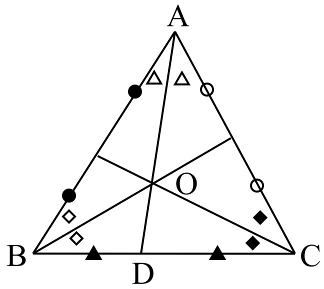
⑥⑦より

$BC = CA = AB$

したがって、三角形ABCは正三角形である。

また、三角形の重心と内心が一致するとき、その三角形は正三角形である。

［証明］



三角形ABCの重心をOとし、同時に内心でもあるとする。
直線AOと辺BCとの交点をDとする。
点Oが重心であることより、線分AOは中線であり、点Dは線分BCの中点である。よって

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=1:1$　…①

点Oが内心であることより、線分ADは∠Aの二等分線である。よって、三角形の角の二等分線の性質より

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$　…②

①②より

$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1:1$

よって

$\mathrm{AB}=\mathrm{CA}$　…③

同様にして、BOを利用すると

$\mathrm{BC}=\mathrm{AB}$　…④

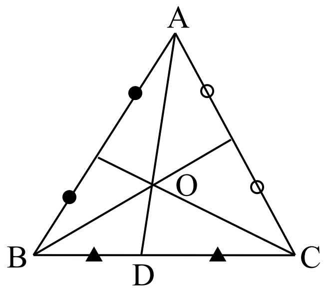
③④より

$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\mathrm{AB}$

したがって、三角形ABCは正三角形である。

重心と外心が一致するとき、その三角形は正三角形である。

［証明］



三角形 ABC において、その外心を O とし、同時に O は重心でもあるとする。

直線 AO と辺 BC との交点を D とする。

点 O が三角形 ABC の重心であることより、線分 AD は中線である。よって、D は辺 BC の中点である。さらに、D が辺 BC の中点であることと、点 O が三角形 ABC の外心であることより、直線 AD は辺 BC の垂直二等分線である。よって

$$BD = CD、\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

これらと AD が共通であることより

$$\triangle ADB \equiv \triangle ADC$$

対応する辺の長さは等しいので

$$AB = AC \quad \cdots①$$

同様にして、BO を利用して

$$BA = BC \quad \cdots②$$

①②より

$$BC = CA = AB$$

したがって、三角形 ABC は正三角形である。

以上より、次のことがいえる。

正三角形の、重心、外心、内心は一致する。

三角形の、重心、外心、内心のうちの、二つが一致すれば、正三角形である（残りの一つも一致する）。

[インデックスに戻る]